

Vorlesung „Körpertheorie“ (Sommersemester 2024)

Übungsblatt 9 (12.6.2024-19.6.2024)

Mit **P** werden Präsenzaufgaben, mit **H** Hausaufgaben bezeichnet.

Präsenzaufgaben

Aufgabe P41: Sei K ein Körper und $f = x^3 + x + 1 \in K[x]$. Zeige, dass f genau dann separabel ist, wenn $\text{char}(K) \neq 31$ gilt.

Aufgabe P42: (Staatsexamensaufgabe) Sei $f \in \mathbb{C}[X]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass es höchstens $n - 1$ komplexe Zahlen α gibt, für die $f(X) - \alpha$ eine mehrfache Nullstelle hat.

Aufgabe P43: (Staatsexamensaufgabe)

Es sei $L|K$ eine endliche Körpererweiterung. Die Charakteristik von K sei kein Teiler des Grades $[L : K]$. Beweisen Sie, daß $L|K$ separabel ist.

Aufgabe P44: Gegeben seien die komplexen Zahlen $\zeta = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $\alpha = \sqrt[3]{2}$ und $\beta = \zeta \sqrt[3]{2}$ (wie in Aufgabe H7). Bestimme alle $c \in \mathbb{Q}$ mit

$$\mathbb{Q}(\alpha, \beta) = \mathbb{Q}(\alpha + c\beta).$$

Aufgabe P45: (Teil einer Staatsexamensaufgabe) Geben Sie ein Verfahren an, um mit Zirkel und Lineal zu einem gegebenen Dreieck ein Quadrat mit gleichem Flächeninhalt zu konstruieren! (Hinweis: Man kann Aufgabe H17 verwenden.)

Hausaufgaben¹

Aufgabe H25: (Staatsexamensaufgabe) Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass das Polynom $f(X) = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$ keine mehrfachen Nullstellen in den komplexen Zahlen besitzt.

Aufgabe H26: (Staatsexamensaufgabe) Es sei L/K eine Körpererweiterung vom Grad 2.

- (a) Zeigen Sie, dass L/K stets normal ist.
- (b) Zeigen Sie, dass L/K im Fall $\text{char}K \neq 2$ stets separabel ist.
- (c) Geben Sie (mit Begründung) jeweils ein Beispiel für eine separable und eine inseparable Körpererweiterung L/K vom Grad 2 im Fall $\text{char}K = 2$ an.

Hinweis: für den zweiten Teil: Betrachten Sie den rationalen Funktionenkörper $k(T)$ über einem Körper k .

Aufgabe H27: Gegeben seien die komplexen Zahlen $\alpha = \sqrt[4]{2}$ und $\beta = i\sqrt[4]{2}$. Bestimme alle $c \in \mathbb{Q}$ mit

$$\mathbb{Q}(\alpha, \beta) = \mathbb{Q}(\alpha + c\beta).$$

¹Abgabe der Hausaufgaben bis 19.6.2024, 10:00 Uhr in den Übungskästen oder in den Übungsgruppen