Mathematisches Institut
Friedrich-Alexander Universität
Erlangen-Nürnberg

Masterarbeit

Krein'sche Stabilitätstheorie J-selbstadjungierter Operatoren

Stefan Daiker

Oktober 15, 2014

Betreuer: Prof. Herrmann Schulz-Baldes

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Ein Kreinraum $(\mathcal{K}, J)$ sei ein komplexer separabler Hilbertraum $\mathcal{K}$ mit gerader oder unendlicher Dimension, versehen mit einer sogenannten fundamentalen Symmetrie J, welche ein beschränkter Operator $J \in \mathbb{B}(\mathcal{K})$ ist, mit folgenden Eigenschaften:

$$J^2 = \mathbb{1}, \qquad J^* = J$$

wobei die beiden Eigenräume von J dieselbe Dimension haben.

Die fundamentale Symmetrie J kann auch aufgefaßt werden als Sesquilinearform auf $\mathcal{K}$ vermöge

$$(\phi, \psi) \ni \mathcal{K} \times \mathcal{K} \mapsto \langle \phi, J\psi \rangle.$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt auf $\mathcal{K}$ bezeichne.

Einen beschränkten linearen Operator H auf $\mathcal{K}$ nennen wir J-selbstadjungiert, wenn seine Adjungierte H^+ bzgl. der Sesquilinearform $\langle \cdot, J \cdot \rangle$ mit H übereinstimmt. In diesem Fall gilt

$$JH = H^* J,$$

wobei H^* wie üblich die Adjungierte von H bzgl. des Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichne. Das Spektrum $\sigma(H)$ eines J-selbstadjungierten Operators H ist symmetrisch bzgl. der reellen Achse

$$\sigma(H) = \overline{\sigma(H)}.$$

Einen isolierten Eigenwert eines Operators T mit endlicher algebraischer Vielfachheit bezeichnen wir als normalen Eigenwert von T. Die Menge aller normalen Eigenwerte von T als diskretes Spektrum $\sigma_{\text{dis}}(T)$. Das Komplement $\sigma_{\text{ess}}(T) = \sigma(T) \setminus \sigma_{\text{dis}}(T)$ sei das wesentliche Spektrum von T. Auch das diskrete Spektrum und das wesentliche Spektrum eines J-selbstadjungierten Operators ist symmetrisch bzgl. der reellen Achse.

Der reelle Teil des diskreten Spektrum $\sigma_{\text{dis}}(H)$ eines J-selbstadjungierten Operators H hat eine bemerkenswerte Stabilitätseigenschaft unter Störungen. Zum Beispiel können definite reelle Punkte des diskreten Spektrums von H die reelle Achse nicht verlassen (siehe Kreinsches Stabilitätskriterium im dritten Kapitel). Grundlegend für das Studium dieser Stabilitätseigenschaft ist die Betrachtung der Trägheit $\nu(\lambda)$ (siehe Kapitel III.2) der normalen Eigenwerte $\lambda \in \sigma_{\text{dis}}(H)$. Diese ist wiederum mittels der Trägheit $\nu(\mathcal{E}_\lambda)$ (siehe Kapitel II.2) des Hauptraumes $\mathcal{E}_\lambda$ von H zum Eigenwert λ gegeben.

Im vierten Kapitel, dem Hauptteil der Arbeit, betrachten wir J-selbstadjungierte Operatoren auf $\mathcal{K}$, deren relles Spektrum diskret und endlich ist. Die Menge solcher Operatoren bezeichnen wir mit $\mathbb{GH}(\mathcal{K}, J)$ und deren Elemente bezeichnen wir als essentially $\mathbb{R}$-gapped. Wir sagen ein J-selbstadjungierter Operator H ist $\mathbb{R}$-Fredholm, falls $H - x$ ein Fredholm Operator ist für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Menge aller $\mathbb{R}$-Fredholm Operatoren bezeichnen wir mit $\mathbb{FH}(\mathcal{K}, J)$. Es gilt $\mathbb{FH}(\mathcal{K}, J) = \mathbb{GH}(\mathcal{K}, J)$. Es ist $\mathbb{GH}(\mathcal{K}, J) = \mathbb{FH}(\mathcal{K}, J)$ offen bzgl. der Normtopologie und stabil unter kompakter Störung.

Unser Hauptaugenmerk gilt nun der Signatur $\mathrm{Sig} : \mathbb{GH}(\mathcal{K}, J) \to \mathbb{Z}$, wobei $\mathrm{Sig}(H)$ gegeben ist mittels der Trägheiten sämtlicher reller normaler Eigenwerte von H (siehe Kapitel IV.6). Es bezeichne $\mathbb{GH}_m(\mathcal{K}, J)$ die Komponente von $\mathbb{GH}(\mathcal{K}, J)$, auf der Sig den Wert $m \in \mathbb{Z}$ annimmt. Wir zeigen, Sig ist eine Homotopieinvariante ähnlich dem Index auf Fredholm Operatoren. Genauer formuliert $\mathbb{GH}(\mathcal{K}, J)$ zerfällt in offene, zuammenhängende, Komponenten $\mathbb{GH}_m(\mathcal{K}, J)$ wo m ganz $\mathbb{Z}$ durchläuft. Falls $\dim \mathcal{K} = \infty$, ist für alle $m \in \mathbb{Z}$ die Menge $\mathbb{GH}_m(\mathcal{K}, J)$ nicht-leer.

Im fünften Kapitel versehen wir $\mathcal{K}$ mit einer Komplexkonjugation, die es uns erlaubt, die Komplexkonjugierte $\overline{T}$ eines Operators T auf $\mathcal{K}$ zu definieren. Zusätzlich versehen wir $\mathcal{K}$ mit zwei Symmetrien J_F, J_R und erhalten den Raum $(\mathcal{K}, J_F, J_R)$. Hierbei fordern wir, dass die beiden Symmetrien reell sind, d.h.

$$\overline{J}_F = J_F, \quad \overline{J}_R = J_R$$

und es sei

$$J_F^2 = \eta_F \mathbb{1}, \quad J_R^2 = \eta_R \mathbb{1},$$

mit Vorzeichen $\eta_F, \eta_R \in \{-1, +1\}$, sodass die Kommutationsbeziehung

$$J_F J_R = \eta_{FR} J_R J_F \text{ mit } \eta_{FR} \in \{-1, 1\}$$

erfüllt ist. Ferner seien die Dimension der beiden Eigenräume von J_F gleich; dasselbe gelte für J_R. Den Raum $(\mathcal{K}, J_F, J_R)$, bezeichnen wir als Kreinraum mit reller Symmetrie.

Wir sagen ein stetiger Operator auf $\mathcal{K}$ ist J_F-selbstadjungiert, falls

$$H^* J_F = J_F H$$

und J_R-symmetrisch, falls

$$\overline{H} J_R = -J_R H$$

Wir betrachten nun J_F-selbstadjungierte, J_R-symmetrische Operatoren. Das Spektrum eines solchen Operators H ist symmetrisch bzgl. der reellen Achse und symmetrisch bzgl. der imaginären Achse

$$\sigma(H) = \overline{\sigma(H)} = \overline{-\sigma(H)} = -\sigma(H).$$

Die Definition von Signatur und Trägheit erfolgt analog mittels $\sqrt{\eta_F} J_F$. Auch hier erhalten wir einige interessante Ergebnisse wie z.B. die Kramersche Entartung, wonach die Signatur im Fall $\eta_R = -1$ nur gerade Werte annimmt. Ferner gilt im Fall $\eta_F \eta_{FR} = -1$, dass die Signatur nur den Wert 0 annimmt.

Die Arbeit folgt in vielen Aspekten den Arbeiten [SB] und [SV]. Diese betrachtet jedoch J-unitäre Operatoren U auf $(\mathcal{K}, J)$, deren wesentliche Eigenschaft gegeben ist durch die Gleichung

$$U^* J U = J.$$

Zum Teil konnten wir Beweise direkt übernehmen oder der neuen Situation anpassen.

Notation:

- Es bezeichne $\mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$ den Vektorraum der $n \times n$-Matrizen mit Komponenten aus $\mathbb{C}$
- Es bezeichne$\mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$ die Gruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen mit Komponenten aus $\mathbb{C}$.
- Es bezeichne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt in $\mathcal{K}$ und für $\phi \in \mathcal{K}$ bezeichne ϕ^* die Abbildung $\mathcal{K} \to \mathbb{C}$
$$\psi \mapsto \langle \phi, \psi \rangle.$$
- Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\ell^2(n) = \ell^2(\{1, \ldots, n\})$ der Hilbertraum über $\mathbb{C}$ der Folgen $(x_k)_{k \in \{1,\ldots,n\}}$ mit Folgengliedern $x_k \in \mathbb{C}$.
- Falls $n = \infty$ sei $\ell^2(n) = \ell^2(\mathbb{N})$ der Hilbertraum über $\mathbb{C}$ der quadratsummierbaren Folgen $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit Folgengliedern $x_k \in \mathbb{C}$.
- Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und seien $S : \ell^2(n) \to \mathcal{H}, T : \ell^2(m) \to \mathcal{H}$ lineare Operatoren. Dann bezeichne (S, T) die Abbildung
$$\ell^2(n) \oplus \ell^2(m) \to \mathcal{H} \qquad (\phi, \psi) \mapsto S\phi + T\psi.$$
- Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und seien $S : \mathcal{H} \to \ell^2(n), T : \mathcal{H} \to \ell^2(m)$ lineare Operetoren, dann bezeichne $\begin{pmatrix} S \\ T \end{pmatrix}$ die Abbildung
$$\mathcal{H} \to \ell^2(n) \oplus \ell^2(m) \quad \phi \mapsto (S\phi, T\phi).$$

2 Grundlagen

2.1 Der Kreinraum $(\mathcal{K}, J)$, Isotropie und Orthogonalität von Teilräumen

Definition 1. *Sei $\mathcal{H}$, versehen mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{H}}$ ein separabler Hilbertraum und*

$$\mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \qquad J = \mathbb{1} \oplus -\mathbb{1}.$$

Ist $\mathcal{K}$ versehen mit dem kanonischen Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ gegeben durch

$$\langle(\phi_1, \phi_2), (\psi_1, \psi_2)\rangle = \langle\phi_1, \psi_1\rangle_{\mathcal{H}} + \langle\phi_2, \psi_2\rangle_{\mathcal{H}},$$

dann bezeichnen wir $(\mathcal{K}, J)$ als Kreinraum.

Eine gleichwertige Definition ist gegeben durch

Definition 2 (alternative Definition des Kreinraums $(\mathcal{K}, J)$). *Sei $\mathcal{K}$ ein separabler Hilbertraum und J ein beschränkter Operator auf $\mathcal{K}$ mit den Eigenschaften*

- *J ist selbstadjungiert, $J^* = J$*
- *$J^2 = \mathbb{1}$*
- *Die beiden Eigenräume $\mathcal{E}_+, \mathcal{E}_-$ von J zum Eigenwert ± 1 haben dieselbe Diemension,*

dann bezeichnen wir $(\mathcal{K}, J)$ als Kreinraum.

Aus Punkt eins bis drei folgt auch, dass $\mathcal{K}$ (aus Definition 2) orthogonale direkte Summe der beiden isomorphen Eigenräume $\mathcal{E}_+, \mathcal{E}_-$ ist, wodurch die Gleichwertigkeit der beiden Definitionen begründet ist.

Definition 3. *Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}$ ein Teilraum.*

(i) $\mathcal{E}$ heißt positv bzw. negativ definit (für J) genau dann, wenn $\pm\phi^* J\phi > 0$ für alle von Null verschiedenen $\phi \in \mathcal{E}$. Wir nennen $\mathcal{E}$ definit (für J) genau dann, wenn es positiv oder negativ definit ist.

(ii) Wir nennen $\mathcal{E}$ entartet (für J) genau dann, wenn es ein $\phi \neq 0 \in \mathcal{E}$ gibt, sodass $\phi^* J\psi = 0$ für alle $\psi \in \mathcal{E}$.

(iii) Wir nennen $\mathcal{E}$ isotrop (für J) genau dann, wenn $\phi^* J\psi = 0$ für alle $\phi, \psi \in \mathcal{E}$.

(iv) Ein maximal isotroper Teilraum wird Lagrange'sch genannt.

(v) Wir nennen $\mathcal{E}$ coisotrop (für J) genau dann, wenn $\phi^* J\psi = 0$ für alle $\psi \in \mathcal{E}$ impliziert, dass $\psi \in \mathcal{E}$.

Definition 4. *Seien $\mathcal{E}, \mathcal{E}' \subset \mathcal{K}$ Teilräume.*

(i) $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}'$ werden J-orthogonal genannt, wenn $\phi^* J\psi = 0$ für alle $\phi \in \mathcal{E}$ und $\psi \in \mathcal{E}'$. Wir schreiben $\mathcal{E} \hat{\perp} \mathcal{E}'$.

(ii) Zum Teilraum $\mathcal{E}$ sei das J-orthogonale Komplement $\mathcal{E}^{\hat{\perp}}$ gegeben durch alle $\phi \in \mathcal{K}$ mit $\phi^* J\psi = 0$ für alle $\psi \in \mathcal{E}$.

Eine direkte Summe $\mathcal{E} = \oplus_{k=1}^{n} \mathcal{E}_k$ von paarweise J-orthogonalen Teilräumen von $\mathcal{K}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \hat{+} \cdots \hat{+} \mathcal{E}_n$

Lemma 1. *Sei $\mathcal{E}$ ein Teilraum von $\mathcal{K}$.*

(i) $(\mathcal{E}^{\hat{\perp}})^{\hat{\perp}} = \overline{\mathcal{E}}$

(ii) $\mathcal{E}$ ist genau dann isotrop, wenn $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^{\hat{\perp}}$

(iii) $\mathcal{E}$ ist genau dann coisotrop, wenn $\mathcal{E}^{\hat{\perp}} \subset \mathcal{E}$

(iv) $\mathcal{E}$ ist genau dann Lagrange, wenn $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{\hat{\perp}}$

(v) $\mathcal{E}$ ist genau dann nicht-entartet, wenn $\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^{\hat{\perp}} = \{0\}$

Im Gegensatz zur Euklidischen Geometrie gilt im Allgemeinen nicht $\overline{\mathcal{E}} \oplus \mathcal{E}^{\hat{\perp}} = \mathcal{K}$, aber es gelten die folgenden von der Euklidischen Geometrie wohlvertrauten Beziehungen.

Proposition 1. *Seien $\mathcal{E}, \mathcal{F} \subset \mathcal{K}$ Teilräume. Dann*

(i) $J\mathcal{E}^{\perp} = \mathcal{E}^{\hat{\perp}}$

(ii) $\mathcal{E} \subset \mathcal{F} \Leftrightarrow \mathcal{F}^{\hat{\perp}} \subset \mathcal{E}^{\hat{\perp}}$

(iii) $\mathcal{E}^{\hat{\perp}} + \mathcal{F}^{\hat{\perp}} = (\mathcal{E} \cap \mathcal{F})^{\hat{\perp}}$ *und* $(\mathcal{E} + \mathcal{F})^{\hat{\perp}} = \mathcal{E}^{\hat{\perp}} \cap \mathcal{F}^{\hat{\perp}}$

(iv) $\dim \mathcal{E} + \dim \mathcal{E}^{\hat{\perp}} = \dim \mathcal{K}$.

Beweis. (i) bis (iii) sind leicht zu zeigen und (iv) erhält man mit der bekannten Dimensionsformel $\dim \mathcal{E} + \dim \mathcal{E}^{\perp} = \dim \mathcal{K}$ und der Eigenschaft, dass J ein Isomorphismus $\mathcal{E}^{\perp} \to J\mathcal{E}^{\perp}$ ist, woraus folgt $\dim \mathcal{E}^{\perp} = \dim(J\mathcal{E}^{\perp}) = \dim \mathcal{E}^{\hat{\perp}}$. □

Definition 5 (Frame). *Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}$ Teilraum. Wir nennen eine beschränkte lineare Abbildung $\Phi : \ell^2(\{1 \ldots k\}) \to \mathcal{K}$ mit $\mathrm{Ran}(\Phi) = \mathcal{E}$ und $\Phi^*\Phi = \mathbb{1}$ ein Frame für $\mathcal{E}$. (Frame aus dem Englischen für Rahmen).*

Lemma 2. *Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}$ ein Teilraum mit Frame Φ. Dann gilt $\mathrm{Ker}(\Phi^* J\Phi) = \{0\} \Leftrightarrow \mathcal{E}$ ist nicht-entartet.*

Beweis. Da $J\Phi$ injektiv ist, gilt

$$\mathrm{Ker}(\Phi^* J\Phi) = \{0\} \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(\Phi^*) \cap \mathrm{Ran}(J\Phi) = \{0\}$$

und somit gilt auch

$$\mathrm{Ker}(\Phi^* J\Phi) = \{0\} \Leftrightarrow J(\mathrm{Ker}(\Phi^*) \cap J\mathrm{Ran}(J\Phi) = \{0\}$$

Wegen $J\mathrm{Ker}(\Phi^*) = \mathcal{E}^{\hat{\perp}}$ und $J\mathrm{Ran}(J\Phi) = \mathcal{E}$ folgt die Behauptung mit Lemma 1 (v). □

Proposition 2. *Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}$ ein abgeschlosssener nicht-entarteter Teilraum mit Frame Φ und $0 \notin \sigma_{ess}(\Phi^* J \Phi)$. Dann ist $\mathcal{E}^{\hat{\perp}}$ nicht-entartet und $\mathcal{K} = \mathcal{E} \hat{+} \mathcal{E}^{\hat{\perp}}$. Die schiefe Projektion P mit Bild $\mathcal{E}$ und Kern $\mathcal{E}^{\hat{\perp}}$ ist gegeben durch*

$$P = \Phi(\Phi^* J \Phi)^{-1} \Phi^* J. \tag{1}$$

Ferner ist

$$P^* = JPJ.$$

Beweis. Die Tatsache, dass $\mathcal{E}^{\hat{\perp}}$ nicht-entartet ist, folgt aus Lemma 1 (i) und (ii). Da $\mathcal{E}$ nicht-entartet ist, gilt nach Proposition lem I3.a, dass $\Phi^* J \Phi$ injektiv ist. Nach Voraussetzung ist zudem $0 \notin \sigma_{\text{ess}}(\Phi^* J \Phi)$ woraus folgt, dass $\Phi^* J \Phi$ invertierbar ist. Sei nun

$$P = \Phi(\Phi^* J \Phi)^{-1} \Phi^* J.$$

Wie man leicht nachrechnet, gilt $P^2 = P$. Für den Kern von P ergibt sich

$$\operatorname{Ker}(P) = \operatorname{Ker}(\Phi^* J) = J \operatorname{Ker}(\Phi^*) = J\mathcal{E}^{\perp} = \mathcal{E}^{\hat{\perp}}.$$

Ferner sind $(\Phi^* J \Phi)^{-1}$ und $\Phi^* J$ surjektiv, woraus folgt

$$\operatorname{Ran}(P) = \operatorname{Ran}(\Phi) = \mathcal{E}.$$

Hieraus ergeben sich die restlichen Behauptungen bis auf die letzte, die man leicht nachrechnet. □

2.2 Trägheit und Signatur von Teilräumen

Definition 6. *Sei T ein selbstadjungierter Operator. Es bezeichne*

- *$\nu_+(T)$ die Dimension der Spektralprojektion $\chi_{(0,\infty)}(T)$ von T bzgl. $(0, \infty)$.*
- *$\nu_-(T)$ die Dimension der Spektralprojektion $\chi_{(-\infty,0)}(T)$ von T bzgl.$(-\infty, 0)$.*
- *$\nu_0(T)$ die Dimension der Spektralprojektion $\chi_{\{0\}}(T)$ von T bzgl. $\{0\}$.*

Die Trägheit von T sei das Tripel

$$\nu(T) = (\nu_+(T), \nu_-(T), \nu_0(T)).$$

Wir wollen zunächst den Trägheitssatz von Sylvester in Erinnerung rufen, dieser spielt im Folgenden eine wichtige Rolle. Wir geben eine für uns passende Form dieses Satzes, Korollar 6.7.5. aus dem Lehrbuch von [GF], wieder.

Proposition 3 (Trägheitssatz von Sylvester). *Sei $A \in \operatorname{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$ selbtsadjungiert und $S \in \operatorname{GL}(n; \mathbb{C})$, so haben A und S^*AS den gleichen Rang sowie die gleiche Anzahlen positiver und negativer Eigenwerte, wobei ein Eigenwert entsprechend seiner Vielfachheit mehrfach gezählt wird.*

Definition 7. *Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}$ ein endlich dimensionaler Teilraum mit Frame Φ. Die Trägheit $\nu(\mathcal{E})$ von $\mathcal{E}$ sei gegeben durch die Trägheit des selbstadjungierten Operators $\Phi^* J \Phi$.*

$$\nu(\mathcal{E}) = \nu(\Phi^* J \Phi).$$

Aufgrund des Trägheitssatzes von Sylvester ist die Trägheit $\nu(\mathcal{E})$ wohldefiniert, d.h unabhängig von der Wahl des Frames Φ. Die Signatur $\mathrm{Sig}(\mathcal{E})$ *von $\mathcal{E}$ sei*

$$\mathrm{Sig}(\mathcal{E}) = \nu_+(\mathcal{E}) - \nu_-(\mathcal{E}). \tag{2}$$

Falls $\mathcal{E}$ nicht-entartet ist, können wir die Trägheit $\nu(\mathcal{E})$ auch mittels der schiefen Projektion P, definiert wie in Proposition 2, ausdrücken. Dies wird noch sehr von Vorteil sein.

Proposition 4. *Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{K}$ ein endlich dimensionaler, nicht-entarteter Teilraum und P die schiefe Projektion auf $\mathcal{E}$ mit Kern $\mathcal{E}^{\hat{\perp}}$. Dann*

$$\nu_\pm(\mathcal{E}) = \nu_\pm(P^* J P). \tag{3}$$

Beweis. Sei Φ ein Frame für $\mathcal{E}$. Nach Proposition 2 ist

$$P^* J P = J\Phi(\Phi^* J \Phi)^{-1} \Phi^* J.$$

Wegen $J = J^{-1}$ folgt

$$\nu_\pm(P^* J P) = \nu_\pm(\Phi(\Phi^* J \Phi)^{-1} \Phi^*).$$

Es ist $\mathrm{Ker}(\Phi(\Phi^* J\Phi)^{-1}\Phi^*) = \mathrm{Ker}(\Phi^*) = \mathcal{E}^\perp$ und man sieht leicht, dass $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}^\perp$ invariant sind unter $\Phi(\Phi^* J\Phi)^{-1}\Phi^*$. Bezeichnet $(\Phi(\Phi^* J\Phi)^{-1}\Phi^*)|_{\mathcal{E}}$ die Restriktion von $\Phi(\Phi^* J\Phi)^{-1}\Phi^*$ auf $\mathcal{E}$, so gilt

$$\nu_\pm(\Phi(\Phi^* J\Phi)^{-1}\Phi^*) = \nu_\pm((\Phi(\Phi^* J\Phi)^{-1}\Phi^*)|_{\mathcal{E}}).$$

Es bezeichne $\Phi^*|_{\mathcal{E}}$ die Restriktion von Φ^* auf $\mathcal{E}$. Fassen wir Φ auf als Abbildung auf ihr Bild $\mathcal{E}$, dann gilt $\Phi^{-1} = \Phi^*|_{\mathcal{E}}$. Wir erhalten

$$\nu_\pm((\Phi(\Phi^* J\Phi)^{-1}\Phi^*)|_{\mathcal{E}}) = \nu_\pm(\Phi(\Phi^* J\Phi)^{-1}\Phi^*|_{\mathcal{E}}) = \nu_\pm((\Phi^* J\Phi)^{-1}) = \nu_\pm(\Phi^* J\Phi),$$

woraus die Behauptung folgt. □

Proposition 5. *Sei $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \hat{+} \cdots \hat{+} \mathcal{E}_n$ direkte Summe nicht-entarteter,endlich dimensionaler, paarweise J-orthogonaler Teilräume von $\mathcal{K}$. Dann gilt für die Trägheit von $\mathcal{E}$*

$$\nu(\mathcal{E}) = \sum_{k=1}^{n} \nu(\mathcal{E}_k). \tag{4}$$

Beweis. Sei $\mathcal{F} = \mathcal{E}_2 \hat{+} \cdots \hat{+} \mathcal{E}_n$. Es genügt zu zeigen, dass $\nu(\mathcal{E}) = \nu(\mathcal{E}_1) + \nu(\mathcal{F})$. Die Behauptung folgt dann iterativ. Es ist $\mathcal{F}$ nicht-entartet und $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \hat{+} \mathcal{F}$. Seien Φ und Ψ Frames für $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{F}$ und Θ ein Frame für $\mathcal{E}_1 \hat{+} \mathcal{F}$. Sei $P_{\mathcal{E}_1}$ schiefe Projektion auf $\mathcal{E}_1$ mit Kern $\mathcal{E}_1^{\hat{\perp}}$ und $P_{\mathcal{F}}$ schiefe Projektion auf $\mathcal{F}$ mit Kern $\mathcal{F}^{\hat{\perp}}$ (die beiden schiefen Projektionen existieren nach Proposition 2). Sei $N : \ell^2(\dim \mathcal{E}_1) \oplus \ell^2(\dim \mathcal{F}) \to \ell^2(\dim \mathcal{E}_1) \oplus \ell^2(\dim \mathcal{F})$

$$N = \Theta^*(\Phi, \Psi).$$

N ist invertierbar mit Inverser

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} \Phi^* P_{\mathcal{E}_1} \\ \Psi^* P_{\mathcal{F}} \end{pmatrix} \Theta$$

Ferner ist $\Theta N = (\Phi, \Psi)$. Wir erhalten nun mit dem Trägheitssatz von Sylvester, dass $\nu(\Theta^* J \Theta) = \nu((\Theta N)^* J \Theta N)$ und somit

$$\nu(\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{F}) = \nu((\Phi, \Psi)^* J (\Phi, \Psi)).$$

Da $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{F}$ J-orthogonal sind, ist $\Phi^* J \Psi = 0$ und $\Psi^* J \Phi = 0$ und somit

$$(\Phi, \Psi)^* J (\Phi, \Psi) = \begin{pmatrix} \Phi^* J \Phi & 0 \\ 0 & \Psi^* J \Psi \end{pmatrix},$$

woraus die Behauptung folgt. □

2.3 Lagrange'sche Teilräume

In diesem Abschnitt analysieren wir die Grassman'sche $\mathbb{L}(\mathcal{K}, J)$ von $\mathcal{K}$, die Menge (Mannigfaltigkeit) aller Lagrange'schen Teilräume von $\mathcal{K}$. Dabei identifizieren wir Äquivalenklassen von Frames mit Lagrange'schen Teilräumen. Als J-orthogonales Komplement von sich selbst ist ein Lagrange'scher Teilraum abgeschlossen. Mit Proposition 1 (iv) sehen wir: Falls $\mathcal{K}$ unendliche Dimension hat, haben auch Lagrange'sche Teilräume unendliche Dimension. Falls $\mathcal{K}$ die Dimension $2n < \infty$ hat, haben Lagrange'sche Teilräume die Dimension n. Es ist daher sinvoll und vorteilhaft, Frames für Lagrange'sche Teilräume wie unten folgt zu definieren. Wir erinnern zuvor noch an die spezielle Gestalt des Kreinraums

$$(\mathcal{K}, J) = (\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \mathbb{1} \oplus -\mathbb{1}),$$

mit separablem Hilbertraum $\mathcal{H}$.

Definition 8. *Wir nennen eine lineare Abbildung $\Phi : \mathcal{H} \to \mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ mit $\Phi^*\Phi = \mathbb{1}$ ein Lagrange Frame, falls $\mathrm{Ran}(\Phi)$ ein Lagrange'scher Teilraum ist.*

Es ist $\Phi\Phi^*$ eine orthogonale Projektion in $\mathcal{K}$, deren Bild gerade das Bild von Φ ist. Die komplementäre orthogonale Projektion $J\Phi(J\Phi)^*$ projiziert auf den Lagrange'schen Teilraum mit Frame $J\Phi$ und es gilt

$$\mathbb{1} = \Phi\Phi^* + J\Phi(J\Phi)^*. \tag{5}$$

Es bezeichne $\mathbb{U}(\mathcal{H})$ die Gruppe der unitären Operatoren auf $\mathcal{H}$. Ferner bezeichne $\mathcal{LF}$ die Menge aller Lagrange Frames von $\mathcal{K}$. Auf $\mathcal{LF}$ erklären wir eine Äquivalenzrelation $\sim$ vermöge $\Phi \sim \Psi$ genau dann, wenn $u \in \mathbb{U}(\mathcal{H})$ existiert mit $\Phi u = \Psi$. Es gilt für $\Phi, \Psi \in \mathcal{LF}$

$$\mathrm{Ran}(\Phi) = \mathrm{Ran}(\Psi) \Leftrightarrow \Phi \sim \Psi.$$

Somit können wir die Menge aller Lagrange'scher Teilräume identifizieren mit der Menge der Äquivalenklassen $\{[\Phi]_\sim : \Phi \in \mathcal{LF}\}$.

Proposition 6. *Sei $\mathcal{K} = \mathcal{E} \oplus \mathcal{F}$ direkte Summe zweier Lagrange'scher Teilräume des Kreinraumes $(\mathcal{K}, J)$ und Φ, Ψ Frames für $\mathcal{E}, \mathcal{F}$. Dann ist $(\Psi^* J \Phi)$ invertierbar und die schiefe Projektion P mit $\mathrm{Ran}(P) = \mathcal{E}$ und $\mathrm{Ker}(P) = \mathcal{F}$ ist gegeben durch*

$$P = \Phi(\Psi^* J \Phi)^{-1} \Psi^* J. \tag{6}$$

Beweis. Siehe [SB], Proposition 2. Beachte hierbei, dass die abgeschlossenen Teilräume $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ wegen $\mathcal{E} + \mathcal{F} = \mathcal{K}$ und $\mathcal{E} \cap \mathcal{F} = \{0\}$ ein Fredholm Paar bilden, d.h. der Teilraum $\mathcal{E} + \mathcal{F}$ ist abgeschlossen und $\dim(\mathcal{E} \cap \mathcal{F})$ und $\mathrm{codim}(\mathcal{E} + \mathcal{F})$ sind beide endlich. □

Proposition 7 (Stereografische Projektion). *Sei Ψ ein festes Lagrange Frame. Für jedes andere Lagrange Frame Φ, seien zwei beschränkte Operatoren x und y auf $\mathcal{H}$ gegeben durch*

$$\Phi = \Psi x + J \Psi y. \tag{7}$$

Die stereografische Projektion von Φ entlang Ψ sei

$$\pi_\Psi(\Phi) = (x+y)(x-y)^{-1} = (x+y)(x-y)^*. \tag{8}$$

Es ist $\pi_\Psi(\Phi)$ wohldefiniert und unitär d.h. $\pi_\Psi(\Phi) \in \mathbb{U}(\mathcal{H})$. Darüber hinaus gilt $\pi_\Psi(\Phi) = \pi_\Psi(\Phi u)$ für alle $u \in \mathbb{U}(\mathcal{H})$, sodass π_Ψ zu einer Abbildung auf $\mathbb{L}(\mathcal{K}, J)$ faktorisiert, die wir ebenfalls mit π_Ψ bezeichnen. Durch letztere Abbildung ist eine Bijektion $\pi_\Psi : \mathbb{L}(\mathcal{K}, J) \to \mathbb{U}(\mathcal{H})$ gegeben, mit Inverser

$$\pi_\Psi^{-1}(u) = \Psi \frac{1}{2}(u + \mathbb{1}) + J \Psi \frac{1}{2}(u - \mathbb{1}), \tag{9}$$

wo die rechte Seite der Gleichung einen Repräsentanten aus $\mathbb{L}(\mathcal{K}, J)$ angibt.

Beweis. Gleichung (7) können wir schreiben als

$$\Phi = (\Psi, J\Psi) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Wie man nachrechnet ist $(\Psi, J\Psi)$ unitär, sodass

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\Psi, J\Psi)^* \Phi$$

ein Frame ist , d.h. $x^*x + y^*y = \mathbb{1}$. Darüber hinaus gilt

$$0 = \Phi^* J \Phi = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^* (\Psi, J\Psi)^* J (\Psi, J\Psi) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^*y + y^*x,$$

sodass

$$(x \pm y)^*(x \pm y) = \mathbb{1}.$$

Dies zeigt, dass π_Ψ wohldefiniert ist und unitäres Bild hat. Die Gleichung für die Inverse rechnet man nach. □

Bemerkung 1. *Wählt man als Referenz-Frame* $\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{pmatrix}$ *, dann gilt*

$$\pi_\Psi(\Phi) = ab^{-1}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Proposition 8. *Seien $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ zwei Lagrange'sche Teilräume von $\mathcal{K}$ mit Lagrange Frames Φ und Ψ. Dann*

$$\dim(\mathcal{E} \cap \mathcal{F}) = \dim \operatorname{Ker}(\Psi^* J \Phi) = \operatorname{codim}(\mathcal{E} + \mathcal{F}). \tag{11}$$

Beweis. Zur ersten Gleichheit: Sei $p = \dim(\mathcal{E} \cap \mathcal{F})$ und seien $u, v : \ell^2(\{1, \dots, p\}) \to \mathcal{H}$ zwei partielle Isometrien mit $\Phi v = \Psi w$. Dann ist $\Psi^* J \Phi w = \Psi^* J \Psi v = 0$, sodass der Kern von $\Psi^* J \Phi$ mindestens Dimension p hat. Umgekehrt ergibt sich bei gegebener Isometrie $w : \ell^2(\{1, \dots, q\}) \to \mathcal{H}$ mit $\Psi^* J \Phi w = 0$, dass $(J\Psi)^* \Phi w = 0$ und hieraus $\operatorname{Ran}(\Phi w) \subset \operatorname{Ran}(\Psi)$. Letzteres wegen $\mathcal{K} = \operatorname{Ran}(\Psi) \oplus \operatorname{Ran}(J\Psi)$ mit den orthogonalen Komponenten $\operatorname{Ran}(\Psi)$ und $\operatorname{Ran}(J\Psi)$. Es ist also $\operatorname{Ran}(\Phi w) \subset \mathcal{E} \cap \mathcal{F}$ und damit $q \leq p$, d.h. der Kern von $\Psi^* J \Phi$ hat höchstens Dimension p. Zur zweiten Gleichheit:

$$\operatorname{codim}(\mathcal{E} + \mathcal{F}) = \dim((\mathcal{E} + \mathcal{F})^\perp) = \dim(\mathcal{E}^\perp \cap \mathcal{F}^\perp) = \dim(J\mathcal{E} \cap J\mathcal{F}) = \dim(J(\mathcal{E} \cap \mathcal{F})).$$

□

2.4 Riesz-Projektion

Im Folgenden geben wir ein paar Ergebnisse über die Riesz-Projektion von beschränkten Operatoren T auf einem Hilbertraum wieder. Genaueres findet man etwa in [Kat] § 6.4 und § 6.5 in Kap. III.

Definition 9 (separierte Teilmenge des Spektrums, separierende Kurve). *Wir sagen, $\Gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ ist eine separierende Kurve für $\Delta \subset \sigma(T)$, falls gilt:*

- *Γ ist eine rektifizierbare, geschlossenen Jordan-Kurve, die ganz in $\mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ liegt.*

- *Sämtliche Punkte von Δ werden von Γ eingeschlossen, jedoch kein weiterer Punkt des Spektrums $\sigma(T)$.*
- *Γ hat Windungszahl 1 in jedem Punkt von Δ, ist insbesondere also positiv orientiert.*

Eine Teilmenege $\Delta \subset \sigma(T)$ des Spektrums des abgeschlossenen Operators T nennen wir separiert, wenn eine separierende Kurve für Δ existiert.

Proposition 9. *Sei T ein abgeschlossener Operator auf einem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Sei $\Delta \subset \sigma(T)$ eine separierte Teilmenge des Spektrums $\sigma(T)$ und Γ eine separierende Kurve für Δ. Die Riesz-Projektion von T auf Δ ist definiert als*

$$P_\Delta = \oint_\Gamma \frac{dz}{2\pi i}(z-T)^{-1}. \tag{12}$$

Bild und Kern von P_Δ bezeichnen wir mit $\mathcal{E}_\Delta = \mathrm{Ran}(P_\Delta)$ und $\mathcal{F}_\Delta = \mathrm{Ker}(P_\Delta)$. Statt $P_{\{\lambda\}}, \mathcal{E}_{\{\lambda\}}$ etc. schreiben wir $P_\lambda, \mathcal{E}_\lambda$.

(i) *P_Δ ist unabbhängig von der Wahl von Γ.*

(ii) *P_Δ ist eine schiefe Projektion, d.h.P_Δ ist idempotent und $\mathcal{E}_\Delta, \mathcal{F}_\Delta$ sind abgeschlossene Teilräume von $\mathcal{H}$.*

(iii) *Sind Δ und Δ' disjunkte separierte Teilmengen des Spektrums von T, dann ist $P_\Delta P_{\Delta'} = 0$ und $P_{\Delta\cup\Delta'} = P_\Delta + P_{\Delta'}$.*

(iv) *Für jede Zerlegung $\sigma(T) = \cup_{l=1}^L \Delta_l$ in separierte Teilmengen des Spektrums von T gilt $\sum_{l=1}^L P_{\Delta_l} = \mathbb{1}$.*

(v) *$\mathcal{E}_\Delta$ und $\mathcal{F}_\Delta$ sind invariant unter T. Für die Spektra der Einschränkungen von T auf $\mathcal{E}_\Delta$ bzw. $\mathcal{F}_\Delta$ gilt*

$$\sigma(T|_{\mathcal{E}_\Delta}) = \Delta, \quad \sigma(T|_{\mathcal{F}_\Delta}) = \sigma(T) \setminus \Delta.$$

(vi) *Falls $\dim \mathcal{E}_\lambda < \infty$, dann ist $\mathcal{E}_\lambda$ die lineare Hülle aller Hauptvektoren von T zu λ.*

3 Stabilitätstheorie J-selbstadjungierter Operatoren

3.1 Spektraleigenschaften J-selbstadjungierter Operatoren

Wir wollen J-(selbst)adjungierte Operatoren definieren. Hierfür gehen wir vor wie bei der Definition einer Hilbertraum-Adjungierten, jedoch verwenden wir statt des gewöhnlichen Skalarprodukts die Sesquilinearform J. Weiterführendes in [Bog].

Definition 10. *Sei H ein beschränkter linearer Operator auf $\mathcal{K}$. Nach dem Theorem von Frechet-Riesz existiert für alle $y \in \mathcal{K}$ ein eindeutiges $z \in \mathcal{K}$ mit*

$$\langle Jz, x\rangle = \langle y, JHx\rangle \tag{13}$$

für alle $x \in \mathcal{K}$. Es sei $H^+ : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ definiert vermöge

$$H^+ y = z.$$

Sei H ein beschränkter linearer Operator auf $\mathcal{K}$. Aus (13) ergibt sich

$$\langle H^+ y, Jx\rangle = \langle y, JHx\rangle. \tag{14}$$

für alle $x, y \in \mathcal{K}$. Ersetzen wir in (14) y durch Jy, so bekommen wir

$$H^+ = JH^*J \tag{15}$$

wobei H^* die Hilbertraum-Adjungierte von H ist. Mit H ist auch H^* invertierbar (siehe etwa [DS] XII 1.5 Lemma 6). Wir erhalten hieraus: Mit H ist auch H^+ invertierbar und

$$(H^+)^{-1} = (H^{-1})^+ \tag{16}$$

Definition 11. *Wir bezeichnen H als J-selbstadjungiert genau dann, wenn*

$$H^+ = H. \tag{17}$$

Äquivalent zu (17) ist

$$H^*J = JH. \tag{18}$$

Die Menge aller J-selbstadjungierten Operatoren bezeichnen wir mit

$$\mathbb{H}(\mathcal{K}, J) \tag{19}$$

Als nächstes wollen wir das Spektrum eines J-selbstadjungierten Operators $H \in \mathbb{H}(\mathcal{K}, J)$ untersuchen. Wir bezeichnen mit $\sigma_p(H), \sigma_c(H), \sigma_r(H), \sigma_{\text{ess}}(H), \sigma_{\text{dis}}(H)$ das Punkt-, kontinuierliche-, Residual-, wesentliche-, diskrete Spektrum von H (zur Definiton des wesentlichen-, und diskreten Spektrums siehe Einleitung). Für die nächste Proposition siehe auch [Bog].

Proposition 10. *Sei $H \in \mathbb{H}(\mathcal{K}, J)$. Dann gilt:*

(i) $\sigma(H) = \overline{\sigma(H)}$, *d.h* $\sigma(H)$ *is symmetrisch bzgl. der reellen Achse*

(ii) $\sigma_c(H) = \overline{\sigma_c(H)}$

(iii) $z \in \sigma_p(H) \Rightarrow \overline{z} \in \sigma_p(H) \cup \sigma_r(H)$

(iv) $z \in \sigma_r(H) \Rightarrow \overline{z} \in \sigma_p(H)$

(v) $\sigma_p(H) \cup \sigma_r(H) = \overline{\sigma_p(H) \cup \sigma_r(H)}$

(vi) $\sigma_{\text{dis}}(H) = \overline{\sigma_{\text{dis}}(H)}$.

Beweis. (i) Sei $z \in \rho(H)$. Zunächst ist mit $H - z$ auch $(H - z)^+ = H - \overline{z}$ invertierbar und wir erhalten:

$$(H - \overline{z})^{-1} = ((H - z)^+)^{-1} = ((H - z)^{-1})^+$$

Die rechte Seite der zweiten Identität ist wegen $H \in \mathbb{H}(\mathcal{K}, J)$ und nach (15) nichts anderes als $J(H - z)^{-1})^* J$ und somit $\overline{z} \in \rho(H)$. Damit haben wir gezeigt $\rho(H) = \overline{\rho(H)}$, woraus die Behauptung folgt.
(iii) Sei $z \in \sigma_p(H)$ mit zugeh. Eigenvektor ψ. Nach (i) ist $\overline{z} \in \sigma(H)$. Wir haben zu zeigen: $\overline{z} \notin \sigma_c(H)$. Angenommen $\text{Ran}(H - \overline{z})$ liegt dicht in $\mathcal{K}$, dann existiert $\phi \in \mathcal{K}$ mit

$$\langle \psi, J(H - \overline{z})\phi \rangle \neq 0,$$

denn andernfalls gilt: $J\psi \perp \overline{\text{Ran}(H - z)} = \mathcal{K}$. Wegen $(H - \overline{z})^+ = H - z$ folgt nun

$$\langle (H - z)\psi, J\phi \rangle \neq 0,$$

im Widerspruch zu $(H - z)\psi = 0$.
(iv) Sei $z \in \sigma_r(H)$, dann ist $\text{Ran}(H - z)$ nicht dicht in $\mathcal{K}$, d.h. es existiert $\psi \in \mathcal{K}, \psi \neq 0$ so, dass für alle $\phi \in \mathcal{K}$ gilt:

$$\langle J\psi, (H - z)\phi \rangle = 0,$$

somit ist wegen $(H - z)^+ = H - \overline{z}$:

$$\langle J(H - \overline{z})\psi, \phi \rangle = 0.$$

Wir erhalten $J(H - \overline{z})\psi = 0$ und hieraus, da J injektiv ist, $\overline{z} \in \sigma_p(H)$.
(v) folgt unmittelbar aus (iii) und (iv).
(ii) folgt aus (i) und (v).
(vi) Sei $z \in \sigma_{\text{dis}}(H)$. Wegen (i) ist mit z auch $\overline{z}$ ein isolierter Punkt des Spektrums von H. Aus dem untenstehenden Lemma 3(iii) folgt $\dim(\mathcal{E}_{\overline{z}}) = \dim(\mathcal{E}_z) < \infty$. □

Proposition 11. *Sei* $H \in \mathbb{H}(\mathcal{K}, J)$ *und* Δ *eine separierte Teilmenge des Spektrums von* H. *Sei* P_Δ *und* $P_{\overline{\Delta}}$ *die Riesz-Projektion von* H *auf* Δ *bzw.* $\overline{\Delta}$. *Dann ist*

$$P_\Delta^* J = J P_{\overline{\Delta}} \tag{20}$$

und für den Kern $\mathcal{F}_\Delta$ *von* P_Δ *gilt*

$$\mathcal{F}_\Delta^\perp = J\mathcal{E}_{\overline{\Delta}}. \tag{21}$$

Beweis. Sei Γ eine Kurve, die Δ separiert, dann

$$\begin{aligned} J^* P_\Delta^* J &= J^*(\oint_\Gamma \tfrac{d\bar{z}}{-2\pi i}((z-H)^{-1})^* J = J^*(\oint_\Gamma -\tfrac{d\bar{z}}{2\pi i}((\bar{z}-H^*)^{-1})J \\ &= \oint_\Gamma -\tfrac{d\bar{z}}{2\pi i}((\bar{z}-JHJ^*)^{-1} = \oint_\Gamma -\tfrac{d\bar{z}}{2\pi i}((\bar{z}-H)^{-1} \\ &= -\oint_{\overline{\Gamma}} \tfrac{dz}{2\pi i}(z-H)^{-1} = P_{\overline{\Delta}}. \end{aligned}$$

Wir wollen anmerken, dass aufgrund der Symmetrie des Spektrums von H mit Δ auch $-\overline{\Delta}$ separierte Teilmenge von $\sigma(H)$ ist. Ferner ist die Kurve $-\overline{\Gamma}$ negativ orientiert, und somit verschwindet das Vorzeichen auf der rechten Seite der letzten Identität. Der zweite Teil der Behauptung ergibt sich aus

$$\mathcal{F}_\Delta^\perp = \mathrm{Ran}(P_\Delta^*) = \mathrm{Ran}(JP_{\overline{\Delta}}J) = J\mathrm{Ran}(P_{\overline{\Delta}}) = J\mathcal{E}_{\overline{\Delta}}.$$

□

Lemma 3. *Sei $H \in \mathbb{H}(\mathcal{K}, J)$ und Δ, Δ' separierte Teilmengen von $\sigma(H)$. Seien $P_\Delta, P_{\Delta'}$ die zugehörigen Riesz-Projektionen mit Bild $\mathcal{E}_\Delta$ bzw. $\mathcal{E}_{\Delta'}$. Dann*

(i) Falls $\Delta = \overline{\Delta}$, dann ist $\mathcal{E}_\Delta$ nicht-entartet.

(ii) Falls $\overline{\Delta} \cap \Delta' = \emptyset$, dann sind $\mathcal{E}_\Delta, \mathcal{E}_{\Delta'}$ J-orthogonal.

(iii) $\dim \mathcal{E}_\Delta = \dim \mathcal{E}_{\overline{\Delta}}$.

Beweis. (i) Aus Gleichung (21) folgt $\mathcal{F}_\Delta^{\hat{\perp}} = \mathcal{E}_{\overline{\Delta}} = \mathcal{E}_\Delta$ und somit $\mathcal{F}_\Delta = \mathcal{E}_\Delta^{\hat{\perp}}$. Daraus folgt $\mathcal{E}_\Delta \cap \mathcal{E}_\Delta^{\hat{\perp}} = \mathcal{E}_\Delta \cap \mathcal{F}_\Delta = \{0\}$.
(ii) Wiederum mit Proposition 11 erhalten wir $P_\Delta^* J P_{\Delta'} = JP_{\overline{\Delta}} P_{\Delta'} = 0$. Es gilt also $J\mathcal{E}_{\Delta'} \subset \mathcal{E}_\Delta^\perp$, woraus die Behauptung folgt.
(iii) Sei $\mathcal{F}_\Delta$ der Kern von P_Δ. Nach Proposition 11, Gleichung (21) gilt $\mathcal{F}_\Delta^\perp = J\mathcal{E}_{\overline{\Delta}}$ und somit $\dim \mathcal{E}_{\overline{\Delta}} = \dim \mathcal{F}_\Delta^\perp = \dim \mathcal{E}_\Delta$, wobei die letzte Identität gilt, da $\mathcal{F}_\Delta^\perp, \mathcal{E}_\Delta$ beides Komplementärräume von $\mathcal{F}_\Delta$ sind. □

Proposition 12. *Sei $H \in \mathbb{H}(\mathcal{K}, J)$ und $\Delta = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_n$ Vereinigung paarweise disjunkter, separierter Teilmengen von $\sigma(H)$ mit $\overline{\Delta}_k = \Delta_k$. Dann sind die $\mathcal{E}_{\Delta_k}$ nicht-entartet und es gilt*

$$\mathcal{E}_\Delta = \mathcal{E}_{\Delta_1} \hat{+} \ldots \hat{+} \mathcal{E}_{\Delta_n}. \tag{22}$$

Beweis. Die Tatsache, dass die $\mathcal{E}_{\Delta_k}$ nicht-entartet sind folgt aus Lemma 3(i). Nach Proposition 9 (iv) ist $P_\Delta = P_{\Delta_1} + \ldots + P_{\Delta_n}$ und somit $\mathcal{E}_\Delta = \mathcal{E}_{\Delta_1} + \ldots + \mathcal{E}_{\Delta_n}$. Den Nachweis, dass die Summe direkt ist, erhalten wir mit Proposition 9 (iii). Mit Lemma 3(ii) erhalten wir, dass die Summanden paarweise J-orthogonal sind. Setze hierfür $\Delta = \Delta_k$ und $\Delta' = \sigma(H) \setminus \Delta_k$. □

3.2 Trägheit normaler Eigenvektoren

In diesem Abschnitt legen wir die Grundlagen für die Krein'sche Stabilitätstheorie. Diese beschäftigt sich mit der Trägheit endlicher, symmetrischer Teilmengen Δ des Spektrums J-selbstadjungierte Operatoren $H \in \mathbb{H}(\mathcal{K}, J)$, wobei Δ nur aus endlich vielen (meist ein oder zwei) normalen Eigenvektoren besteht. Wie wir im nächsten Abschnitt sehen, spielt deren Trägheit eine wichtige Rolle.

Lemma 4. *Sei $\lambda \neq \overline{\lambda}$ ein normaler Eigenwert des Operators $H \in \mathbb{H}(\mathcal{K}, J)$. Dann*

$$\nu(\mathcal{E}_\lambda + \mathcal{E}_{\overline{\lambda}}) = (\dim \mathcal{E}_\lambda, \dim \mathcal{E}_\lambda, 0). \tag{23}$$

Beweis. Seien Φ, Ψ Frames für $\mathcal{E}_{\overline{\lambda}}, \mathcal{E}_\lambda$ und Θ ein Frame für $\mathcal{E}_{\overline{\lambda}} + \mathcal{E}_\lambda$. Sei $N = \Theta^*(\Phi, \Psi)$. Es ist N Bijektion und nach Lemma 3(ii) ist $\Phi^* J \Phi = 0$ und $\Psi^* J \Psi = 0$. Wir erhalten

$$(\Theta N)^* J \Theta N = (\Phi, \Psi)^* J (\Phi, \Psi) = \begin{pmatrix} 0 & \Phi^* J \Psi \\ \Psi^* J \Phi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach Lemma 3(i) ist $\mathcal{E}_\lambda + \mathcal{E}_{\overline{\lambda}}$ nicht-entartet und somit hat $\Theta^* J \Theta$ nach Lemma 2 trivialen Kern. Daraus folgt, dass $(\Theta N)^* J \Theta N$ invertierbar ist. Insbesondere sind auch die beiden Blöcke $A = \Phi^* J \Psi$ und $A^* = \Psi^* J \Phi$ invertierbar. Sei

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & \mathbb{1} \\ A^{-1} & -A^{-1} \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$B^* \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^* & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix},$$

woraus die Behauptung mit dem Trägheitssatz von Sylvester und Lemma 3(iii) folgt. $\square$

Definition 12. *Sei λ ein normaler Eigenwert des Operators $H \in \mathbb{H}(\mathcal{K}, J)$ und $\mathcal{E}_\lambda$ das Bild der Riesz-Projektion von H auf $\{\lambda\}$. Wir definieren seine Trägheit $\nu(\lambda; H) = (\nu_+(\lambda; , H), \nu_-(\lambda; H))$ wie folgt:*

(i) Falls $\lambda \in \mathbb{R}$, dann sei

$$\nu(\lambda; H) = (\nu_+(\mathcal{E}_\lambda), \nu_-(\mathcal{E}_\lambda)).$$

(ii) Falls $\lambda \notin \mathbb{R}$, dann sei

$$\nu(\lambda; H) = \begin{cases} (\dim \mathcal{E}_\lambda, 0) & \textit{falls } \operatorname{Im}(\lambda) > 0 \\ (0, \dim \mathcal{E}_\lambda), & \textit{falls } \operatorname{Im}(\lambda) < 0. \end{cases}$$

Falls keine Gefahr für Missverständnisse besteht, schreiben wir auch $\nu(\lambda)$ statt $\nu(\lambda; H)$. Ist $\nu_+(\lambda) = 0$ oder $\nu_-(\lambda) = 0$, so bezeichnen wir λ als negativ bzw. positiv definit, andernfalls als indefinit.

Bemerkung 2. *Im Fall (i) ist nach Lemma 3 (i) stets* $\nu_0(\mathcal{E}_\lambda) = 0$. *Im Fall (ii) ist nach Lemma 4*

$$\nu(\mathcal{E}_\lambda + \mathcal{E}_{\overline{\lambda}}) = (\dim \mathcal{E}_\lambda, \dim \mathcal{E}_\lambda, 0).$$

Proposition 13. *Sei* $H \in \mathbb{H}(\mathcal{K}, J)$ *und* $\Delta \subset \sigma(H)$ *mit* $\Delta = \overline{\Delta}$ *eine Menge normaler Eigenwerte von* H, *dann*

$$\sum_{\lambda \in \Delta} \nu_\pm(\lambda) = \nu_\pm(\mathcal{E}_\Delta). \tag{24}$$

Beweis. Es bezeichne $\Delta' = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ die Menge aller reellen Elemente von Δ und $\Delta'' = \{\mu_1, \dots, \mu_n\}$ die Menge aller nicht reller Elemente von Δ, deren Imaginärteil positiv ist. Nach Lemma 3 ist

$$\mathcal{E}_\Delta = \mathcal{E}_{\lambda_1} \hat{+} \cdots \hat{+} \mathcal{E}_{\mu\lambda_m} \hat{+} (\mathcal{E}_{\mu_1} + \mathcal{E}_{\overline{\mu}_1}) \hat{+} \cdots \hat{+} (\mathcal{E}_{\mu_1} + \mathcal{E}_{\overline{\mu}_n})$$

direkte Summe paarweise J-orthogonaler, nicht-entarteter Sumanden. Nach Proposition 5 gilt

$$\nu_\pm(\mathcal{E}_\Delta) = \sum_{\lambda \in \Delta'} \nu_\pm(\mathcal{E}_\lambda) + \sum_{\mu \in \Delta''} \nu_\pm(\mathcal{E}_\mu + \mathcal{E}_{\overline{\mu}}).$$

Mit Lemma 4 ergibt sich die Behauptung. □

3.3 Krein'sches Stabilitätskriterium

Es bezeichne $\mathrm{Eig}(T, \lambda)$ den Eigenraum des Operators T zum Eigenwert λ. Will man testen, ob ein reeller normaler Eigenwert λ von $H \in \mathbb{H}(\mathcal{K}, J)$ positiv definit ist, hat man die Möglichkeit zu zeigen, dass für alle $\phi \in \mathcal{E}_\lambda \setminus \{0\}$ gilt

$$\langle \phi, J\phi \rangle > 0.$$

Tatsächlich reicht es, die Ungleichung für alle $\phi \in \mathrm{Eig}(H, \lambda) \setminus \{0\}$ nachzuprüfen:

Proposition 14. *Sei* λ *ein reeller normaler Eigenwert von* $H \in \mathbb{H}(\mathcal{K}, J)$. *Dann*

$$\nu_\pm(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \mp\langle \phi, J\phi \rangle > 0 \textit{ für alle } \phi \in \mathrm{Eig}(H, \lambda) \setminus \{0\} \tag{25}$$

Beweis. Sei $\Phi : \ell^2(\{1, \dots, k\}) \to \mathcal{K}$ ein Frame für $\mathcal{E}_\lambda$. Wir zeigen zuerst $' \Rightarrow'$. Sei $\{v_1, \dots, v_n\} \subset \ell^2(\{1, \dots, k\})$ eine Ortonormalbasis aus Eigenvektoren von $\Phi^* J \Phi$ mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Sei $\phi = \Phi(\sum_{k=1,\dots,n} \mu_k v_k) \in \mathrm{Eig}(H, \lambda)$. Dann

$$\langle \phi, J\phi \rangle = \langle \Phi \sum_{k=1,\dots,n} \mu_k v_k, J\Phi \sum_{j=1,\dots,n} \mu_j v_j \rangle = \sum_{k=1,\dots,n} |\mu_k|^2 \lambda_k.$$

Ist $\nu_\pm(\lambda) = 0$, dann sind alle λ_k negativ bzw. positiv und somit ist die rechte Seite der Identität negativ bzw. positiv.

$' \Leftarrow '$ Sei $\epsilon \in \{-1, 1\}$ und sei $\epsilon\langle\phi, J\phi\rangle < 0$ für alle $\phi \in \mathrm{Eig}(H, \lambda) \setminus \{0\}$. Wir machen die Annahme, dass $\mathrm{Eig}(H, \lambda) \neq \mathcal{E}_\lambda$. Dann hat $(H - \lambda\mathbb{1})|_{\mathcal{E}_\lambda}$ einen Orbit der Länge 2 (Gleichbedeutend mit der Existenz eines nichttrivialen Jordanblocks von H zum Eigenwert λ). Es existieren demnach $\psi, \phi \in \mathcal{E}_\lambda \setminus \{0\}$ so, dass $H\phi = \lambda\phi$ und $H\psi = \lambda\psi + \phi$. Nun gilt

$$\langle\phi, JH\psi\rangle = \langle\phi, J\phi\rangle + \lambda\langle\phi, J\psi\rangle$$

und andererseits da $H \in \mathbb{H}(\mathcal{K}, J)$

$$\langle\phi, JH\psi\rangle = \langle H\phi, J\psi\rangle = \lambda\langle\phi, J\psi\rangle.$$

Somit $\langle\phi, J\phi\rangle = 0$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit gilt $\mathrm{Eig}(H, \lambda) = \mathcal{E}_\lambda$, woraus die Behauptung folgt. □

Aus dem letzten Beweis können wir noch mehr ablesen:

Korollar 1. *Sei λ ein reeller normaler Eigenwert von $H \in \mathbb{H}(\mathcal{K}, J)$.*

(i) Falls H einen nicht-trivialen Jordanblock zum normalen Eigenwert λ hat, dann ist λ indefinit, und es gibt einen Eigenvektor ϕ mit $\langle\phi, J\phi\rangle = 0$.

(ii) Falls λ definit ist, dann ist $\mathcal{E}_\lambda = \mathrm{Eig}(H, \lambda)$ und alle Jordanblöcke von H zum Eigenwert λ sind diagonal.

Das nächste Resultat ist eine spezielle Version der Oberhalbstetigkeit des Spektrums abgeschlossener Operatoren für separierte Teilmengen des Spektrums. Siehe etwa [Kat], Kapitel IV, Thm 3.16. Es ist unser wichigstes Hilfsmittel. Kurz zuvor noch eine Notation. Zu einer geschlossenen Jordan-Kurve Γ bezeichne G_Γ das Innere von Γ.

Proposition 15. *Sei Δ eine separierte Teilmenge des Spektrums eines abgeschlossenen Operators T. Sei Γ eine separierende Kurve für Δ. Dann existiert zu jedem $\epsilon > 0$ eine Umgebung $\mathcal{U}$ von T [1], sodass für alle $T' \in \mathcal{U}$ gilt*

(i) $\Delta' = \sigma(T') \cap G_\Gamma$ wird durch Γ separiert,

und ferner, wobei wir die Riesz-Projektionen von T, T' bezüglich Δ bzw. Δ' mit $P_\Delta, P'_{\Delta'}$ bezeichnen, das Bild von $P_\Delta, P'_{\Delta'}$ mit $\mathcal{E}$ bzw. $\mathcal{E}'$ und das Bild von $\mathbb{1} - P_\Delta, \mathbb{1} - P'_{\Delta'}$ mit $\mathcal{F}$ bzw. $\mathcal{F}'$ bezeichnen,

(ii) $\left\|P'_{\Delta'} - P_\Delta\right\| < \epsilon$.

(iii) $\mathcal{E} \oplus \mathcal{F}$ ist isomorph zu $\mathcal{E}' \oplus \mathcal{F}', \mathcal{E}$ ist isomorph zu $\mathcal{E}'$ und $\mathcal{F}$ ist isomorph zu $\mathcal{F}'$. Insbesondere stimmen die jeweiligen Dimensionen überein.

Bemerkung 3. *Proposition 15 lässt sich in naheliegender Weise verallgemeinern, sodass mehrere separierte Teilmengen des Spektrums betrachtet werden können.*

[1] bzgl. der Topologie der generalized convergence, siehe [Kat], Kapitel IV § 2. Deren Spurtopologie bzgl. der Teilmenge der stetigen Operatoren ist gleich der Operatortopologie der stetigen Operatoren.

Proposition 16. *Sei $\Delta = \overline{\Delta}$ eine Menge normaler Eigenwerte von $H \in \mathbb{H}(\mathcal{K}, J)$ und Γ eine separierende Kurve für Δ. Dann existiert eine Umgebung $\mathcal{U} \subset \mathbb{H}(\mathcal{K}, J)$ von H, sodass für alle $H' \in \mathcal{U}$ gilt*

$$\nu(\mathcal{E}_\Delta) = \nu(\mathcal{E}'_{\Delta'}),$$

wobei $\mathcal{E}_\Delta$ das Bild der Riesz-Projektion von H auf Δ ist, ferner Δ' das Spektrum von H' ist, das im Inneren von Γ liegt und $\mathcal{E}'_{\Delta'}$ das Bild der Riesz-Projektion von H' auf Δ'.

Beweis. Wir wenden Proposition 15 an mit $T = H$. Wir können eine Umgebung $\mathcal{U} \subset \mathbb{H}(\mathcal{K}, J)$ von H wählen, sodass (i) bis (iii) erfüllt ist. Sei $H' \in \mathcal{U}$ und $\Delta', P'_{\Delta'}, \mathcal{E}'_{\Delta'}$ gemäß der Definition in Proposition 15 und sei ferner$J_\Delta = P^*_\Delta J P_\Delta, J'_{\Delta'} = P'^*_{\Delta'} J P'_{\Delta'}$. Es ist $\Delta' = \overline{\Delta'}$ und somit ist $\mathcal{E}_{\Delta'}$ nach Lemma 3 nicht-entartet. Da $\mathcal{E}_\Delta$ und $\mathcal{E}_{\Delta'}$ nicht-entartet sind, ist $\nu_0(\mathcal{E}_\Delta) = 0$ und $\nu_0(\mathcal{E}'_{\Delta'}) = 0$. Somit haben wir zu zeigen

$$\nu_\pm(\mathcal{E}_\Delta) = \nu_\pm(\mathcal{E}'_{\Delta'}).$$

Nach Proposition 4 ist dies erfüllt, falls

$$\nu_\pm(J_\Delta) = \nu_\pm(J'_{\Delta'}).$$

Wir zeigen nur $\nu_+(J_\Delta) = \nu_+(J'_{\Delta'})$, den anderen Fall zeigt man analog. Es bezeichne Σ_+ das positive Spektrum von J_Δ. Wir wenden Proposition 15 an, wobei wir diesmal setzen $T = J_\Delta, \Delta = \Sigma_+$ und Γ eine Kurve, die Σ_+ separiert ohne die imaginäre Achse zu schneiden. Nach eventueller Verkleinerung der Umgebung $\mathcal{U}$ im Sinne der Inklusion ist $J'_{\Delta'}$ nahe genug bei J_Δ, sodass (i) und (iii) erfüllt ist. Hieraus folgt die Behauptung. □

Die nächste Proposition trägt der leicht unterschiedlichen Definition der Trägheit eines nicht-reellen Eigenwertes λ und der Trägheit seines Hauptraums $\mathcal{E}_\lambda$ Rechnung.

Proposition 17. *Die Trägheit $\nu(\lambda)$ eines normalen Eigenwerts λ von $H \in \mathbb{H}(\mathcal{K}, J)$ hängt stetig von H ab. Genauer: Sei Γ eine separierende Kurve für $\Delta = \{\lambda\}$. Dann existiert eine Umgebung $\mathcal{U} \subset \mathbb{H}(\mathcal{K}, J)$ von H so, dass für alle $H' \in \mathcal{U}$ gilt*

- *$\Delta' = \sigma(H') \cap G_\Gamma$ wird von Γ separiert.*
- *Δ' besteht aus endlich vielen normalen Eigenwerten von H'.*
- *$\sum_{\mu \in \Delta'} \nu(\mu, H') = \nu(\lambda; H)$.*

Beweis. Wir wenden Proposition 15 an mit $\Delta = \{\lambda\}$ und $T = H$. Wir können eine Umgebung $\mathcal{U} \subset \mathbb{H}(\mathcal{K}, J)$ von H wählen, sodass (i) bis (iii) erfüllt ist. Damit haben wir den ersten Punkt der Behauptung gezeigt, der zweite folgt mit Proposition 9 (v). Die Summenformel in Punkt drei erhält man wie folgt:
Erster Fall: $\mathrm{Im}(\lambda) > 0$. Wir können oBdA annehmen, dass Γ die reelle Achse nicht schneidet. Es gilt nach Wahl der Umgebung $\mathcal{U}$ für alle $H' \in \mathcal{U}$

$$\nu_+(\lambda; H) = \dim \mathcal{E}_\Delta = \dim \mathcal{E}'_{\Delta'}, \quad \nu_-(\lambda; H) = 0$$

und ferner, da alle Elemente von Δ' positiven Imaginärteil haben

$$\sum_{\mu\in\Delta'} \nu_+(\mu; H') = \sum_{\mu\in\Delta'} \dim \mathcal{E}'_\mu = \dim \mathcal{E}'_{\Delta'}, \quad \sum_{\mu\in\Delta'} \nu_-(\mu; H') = 0.$$

Zweiter Fall: $\mathrm{Im}(\lambda) < 0$. Diesen Fall zeigt man analog zum ersten Fall.
Dritter Fall: λ ist reell. Nach Proposition 13 genügt es zu zeigen, dass

$$\nu_\pm(\mathcal{E}_\Delta) = \nu_\pm(\mathcal{E}'_{\Delta'}).$$

Die Behauptung folgt nun wie in Proposition 16. □

Proposition 18. *Sei λ ein reeller, einfacher Eigenwert von $H \in \mathbb{H}(\mathcal{K}, J)$. Dann existiert zu jeder Kreisscheiben-Umgebung $\mathcal{V}$ von λ mit $\overline{\mathcal{V}} \cap \sigma(H) = \{\lambda\}$ eine Umgebung $\mathcal{U} \subset \mathbb{H}(\mathcal{K}, J)$ von H, sodass alle $H' \in \mathcal{U}$ in $\mathcal{V}$ genau einen reellen, einfachen Eigenwert haben.*

Beweis. Wir wenden Proposition 17 an. Wähle Γ mit Bild $\partial\mathcal{V}$. Für H' nahe bei H ist $\nu(\mathcal{E}'_{\Delta'}) = \nu(\lambda; H) = (0, 1)$ oder $\nu(\mathcal{E}'_{\Delta'}) = \nu(\lambda; H) = (1, 0)$ und somit ist $\nu_+(\mathcal{E}'_{\Delta'}) + \nu_-(\mathcal{E}'_{\Delta'}) = 1$. Gäbe es in $\mathcal{V}$ einen nicht reellen Eigenwert μ von H' oder mehr als einen Eigenwert oder einen nicht einfachen Eigenwert so wäre $\nu_+(\mathcal{E}'_{\Delta'}) + \nu_-(\mathcal{E}'_{\Delta'}) \geq 2$. □

Theorem 1 (Kreinsches Stabilitätskriterium). *Sei λ ein definiter, normaler reeller Eigenwert von $H \in \mathbb{H}(\mathcal{K}, J)$. Dann existiert zu jeder Kreisscheiben-Umgebung $\mathcal{V}$ von λ mit $\overline{\mathcal{V}} \cap \sigma(H) = \{\lambda\}$ eine Umgebung $\mathcal{U}$ von H, sodass deren Elemente H' in $\mathcal{V}$ nur reelle und definite Eigenwerte λ' haben und alle Jordanblöcke von H' zum Eigenwert λ' diagonal sind.*

Beweis. Wir wenden Proposition 17 an. Wähle Γ mit Bild $\partial\mathcal{V}$ und Umgebung $\mathcal{U} \subset \mathbb{H}(\mathcal{K}, J)$ von H. Für $H' \in \mathcal{U}$ gilt, falls $\nu_+(\lambda; H) = 0$,

$$\sum_{\mu\in\Delta'} \nu_+(\mu; H') = \nu_+(\lambda; H) = 0$$

und falls $\nu_-(\lambda; H) = 0$ ist, gilt

$$\sum_{\mu\in\Delta'} \nu_-(\mu; H') = \nu_-(\lambda; H) = 0.$$

Somit ist jedes $\mu \in \Delta'$ ein reeller und definiter Eigenwert von H', denn aus der Annahme, dass ein $\mu \in \Delta'$ nicht reell ist, ergibt sich der Widerspruch $\sum_{\mu\in\Delta'} \nu_\pm(\mu; H') > 0$. Damit ist die erste Aussage gezeigt und die zweite ergibt sich unmittelbar aus Korollar 1 (ii).□

4 Homotopietheorie essentially $\mathbb{R}$-gapped, J-selbstadjungierter Operatoren

4.1 J-selbstadjungierte $\mathbb{R}$-Fredholm Operatoren

Zunächst wollen wir ein paar Standard-Definitionen und Eigenschaften von Fredholm Operatoren angeben. Siehe hierzu etwa das Lehrbuch [Con] Kapitel XI. Im Folgenden seien $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ stets Hilberträume.

Definition 13. *Sei $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ ein beschränkter Operator*

- *T heißt links semi-Fredholm, falls es einen beschränkten Operator B und einen kompakten Operator K gibt, sodass $BT = \mathbb{1} + K$.*
- *T heißt rechts semi-Fredholm, falls es einen beschränkten Operator B' und einen kompakten Operator K' gibt, sodass $TB' = \mathbb{1} + K'$.*
- *T heißt Fredholm, falls T sowohl links semi-Fredholm als auch rechts semi-Fredholm ist.*

Bemerkung 4. *Nach Schauders Theorem ist mit K auch K^* kompakt. Hieraus folgt: T ist links semi-Fredholm genau dann, wenn T^* rechts semi-Fredholm ist.*

Proposition 19. *Sei $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ ein beschränkter Operator. Dann sind äquivalent*

(i) *T ist links semi-Fredholm.*

(ii) $\mathrm{Ran}(T)$ *ist abgeschlossen und* $\dim \mathrm{Ran}(T) < \infty$.

(iii) *Es gibt einen beschränkten Operator $B : \mathcal{H}' \mapsto \mathcal{H}$ und einen endlich dimensionalen Operator F auf $\mathcal{H}$, sodass $BT = \mathbb{1} + F$.*

(iv) *Es gibt keine orthonormale Folge $\{e_n\}$ in $\mathcal{H}$ mit $\lim \|Te_n\| = 0$.*

(v) *Ist der positive Operator $(T^*T)^{\frac{1}{2}} = \int_0^\infty dtE(t)$, dann gibt es $\delta > 0$ sodass $E[0, \delta]\mathcal{H}$ endlichdimensional ist.*

(vi) *T ist wesentlich nach unten beschränkt, d.h es existiert eine Konstante $\delta > 0$, sodass der positive Operator $TT^* \geq \delta\mathbb{1}$ bis auf einen endlich dimensionalen Teilraum.*

Definition 14. *Sei $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ ein Fredholm Operator. Der Index von T sei*

$$Ind(T) = \dim \mathrm{Ker}(T) - \dim \mathrm{Ker}(T^*). \tag{26}$$

Definition 15. *Sei $T \in \mathbb{H}(\mathcal{K}, J)$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann bezeichnen wir T als x-Fredholm genau dann, wenn $T - x\mathbb{1}$ Fredholm ist, und als $\mathbb{R}$-Fredholm genau dann, wenn T für alle $x \in \mathbb{R}$ x-Fredholm ist. Die entsprechenden Mengen aller x-Fredholm und $\mathbb{R}$-Fredholm Operatoren bezeichnen wir mit $\mathbb{FH}(\mathcal{K}, J, x)$ bzw. $\mathbb{FH}(\mathcal{K}, J)$.*

Proposition 20. *Sei $x \in \mathbb{R}$ und $H \in \mathbb{H}(\mathcal{K}, J)$. Dann ist $H - x\mathbb{1}$ Fredholm genau dann, wenn $H - x\mathbb{1}$ links semi-Fredholm ist.*

Beweis. Es genügt, zu zeigen: $H - x\mathbb{1}$ ist links semi-Fredholm $\Leftrightarrow$ $(H - x\mathbb{1})^*$ ist links semi-Fredholm. Es ist $J(H - x\mathbb{1})^* J = (H - x\mathbb{1})$ und somit gilt $\dim \mathrm{Ker}((H - x\mathbb{1})^*) = \dim \mathrm{Ker}(H - \mathbb{1}x)$ und $\mathrm{Ran}((H - x\mathbb{1})^*)$ ist abgeschlossen genau dann, wenn $\mathrm{Ran}(H - x\mathbb{1})$ abgeschlossen ist. Hieraus folgt die Behauptung mit Proposition 19 (ii). □

Lemma 5. *Die Menge aller links semi-Fredholm Operatoren $H \in \mathbb{H}(\mathcal{K}, J)$ ist offen.*

Beweis. Folgt mit Proposition 15 und der Äquivalenz von (i) und (v) in Proposition 19.□

Proposition 21. *Sei $x \in \mathbb{R}$ und sei $T \in \mathbb{FH}(\mathcal{K}, J, x)$ Dann gilt*

(i) $\mathbb{FH}(\mathcal{K}, J, x)$ ist stabil unter kompakter Störung, d.h. Sei $H \in \mathbb{H}(\mathcal{K}, J)$ und $H - T$ kompakt, dann ist $H \in \mathbb{FH}(\mathcal{K}, J, x)$.

(ii) Es ist $Ind(T - x\mathbb{1}) = 0$.

(iii) $\mathbb{FH}(\mathcal{K}, J, x)$ liegt offen in $\mathbb{H}(\mathcal{K}, J)$ bezüglich der Normtopologie.

Beweis. (i) Folgt direkt aus der Definition von Fredholm Operatoren.
(ii) $(T - \mathbb{1}x) = J(T - \mathbb{1}x)^* J$. Daraus folgt $\dim \mathrm{Ker}(T - \mathbb{1}x) = \dim \mathrm{Ker}(T - \mathbb{1}x)^*$ und hieraus die Behauptung.
(iii) Ergibt sich aus Proposition 20 und Lemma 5. □

Lemma 6. *Ist T Fredholm Operator mit $Ind(T) = 0$, dann gilt $0 \notin \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$.*

Beweis. siehe [SB], Proposition 40. □

Proposition 22. *Sei $T \in \mathbb{FH}(\mathcal{K}, J)$ Dann gilt*

(i) Sei $H \in \mathbb{H}(\mathcal{K}, J)$, sodass $H - T$ kompakt ist, dann ist $H \in \mathbb{FH}(\mathcal{K}, J)$.

(ii) $Ind(T - x\mathbb{1}) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

(iii) $\mathbb{FH}(\mathcal{K}, J)$ liegt offen in $\mathbb{H}(\mathcal{K}, J)$ bezüglich der Normtopologie.

(iv) $\sigma(T) \cap \mathbb{R} \subset \sigma_p(F)$ und jeder reelle Eigenwert hat endliche algebraische Vielfachheit.

Beweis. (i) und (ii) ist erfüllt nach Proposition 21.
(iii) Sei $H \in \mathbb{FH}(\mathcal{K}, J)$. Zu zeigen ist, es existiert Umgebung $\mathcal{U}$ von H, sodass für alle $H' \in \mathcal{U}$ gilt

$$H' - x\mathbb{1} \text{ ist Fredholm für alle } x \in \mathbb{R}. \tag{27}$$

Erster Schritt: Tatsächlich reicht es wegen Proposition 21 (iii) aus, (27) nur für diskretes $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}$ anstelle von $\mathbb{R}$ zu zeigen. Das können wir mit der Dreiecksungleichung zeigen: Sei

$x \in \mathbb{R}$ und sei gemäß Proposition 21 (iii) $\delta > 0$ so gewählt, dass für alle $H' \in \mathbb{H}(\mathcal{K}, J)$ mit $\|H'\| < \delta$ gilt $H' + H \in \mathbb{FH}(\mathcal{K}, J, x)$, dann folgt für alle $H'' \in \mathbb{H}(\mathcal{K}, J)$ mit $\|H''\| < \frac{\delta}{2}$ und ξ mit $|\xi| < \frac{\delta}{2}$

$$\left\|H'' - \xi\mathbb{1}\right\| \leq \left\|H''\right\| + |\xi| < \delta.$$

und somit $H + H'' - \xi\mathbb{1} \in \mathbb{FH}(\mathcal{K}, J, x)$, gleichbedeutend mit $H + H'' \in \mathbb{FH}(\mathcal{K}, J, x + \xi)$.
Zweiter Schritt: Da H stetig ist, folgt, dass $(H + H' - \mathbb{1}x)$ invertierbar und somit Fredholm ist, jedenfalls dann wenn $|x| > \|H\| + 1$ und $\|H'\| < 1$. Wir dürfen also annehmen, dass $\mathcal{R}$ endlich ist. Jetzt folgt (27) leicht aus Proposition 21 (iii).
(iv) Nach Lemma 6 hat $F - x\mathbb{1}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ weder Residualspektrum noch kontinuierliches Spektrum. Woraus schon der erste Teil der Beh. folgt. Der zweite folgt aus der Tatsache, dass nach Voraussetzung $\dim \operatorname{Ker}(T - x\mathbb{1}) < \infty$. □

4.2 Essentially $\mathbb{R}$-gapped J-selbstadjungierte Operatoren

Definition 16. *$H \in \mathbb{H}(\mathcal{K}, J)$ heiße essentially $\mathbb{R}$-gapped, wenn $\sigma(H) \cap \mathbb{R}$ aus endlich vielen normalen Eigenwerten von H besteht. Die Menge aller solcher Operatoren bezeichnen wir mit $\mathbb{GH}(\mathcal{K}, J)$.*

Wir wollen zeigen, dass $\mathbb{GH}(\mathcal{K}, J)$ stabil ist unter kompakter Störung. Zuvor möchten wir jedoch ein Ergebnis zitieren, das man mit Hilfe des Analytischen Fredholmtheorems erhält. Näheres siehe [SB], Thm 12.

Theorem 2. *Seien T und S zwei beschränkte Operatoren auf einem separablem Hilbertraum $\mathcal{H}$, sodass $T - S$ kompakt ist. Sei $C \subset \mathbb{C}$ eine zusammenhängende Komponente von $\mathbb{C} \setminus \sigma(T)$. Dann gilt eine der beiden Alternativen*

(i) In C ist ein Punkt der Resolventenmenge $\rho(T)$ enthalten.

(ii) Alle Punkte von C sind Eigenwerte von S.

Im Fall (i) ist das Spektrum von S in C diskret.

Proposition 23. *Sei $T \in \mathbb{GH}(\mathcal{K}, J)$ und $S \in \mathbb{H}(\mathcal{K}, J)$. Falls $T - S$ kompakt ist, dann ist $S \in \mathbb{GH}(\mathcal{K}, J)$.*

Beweis. T hat in einem h- Schlauch

$$R_h = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im}(z)| \leq h\}$$

mit genügend kleinem $h > 0$ nur diskretes Spektrum. Wir wenden Theorem 2 an mit

$$C = R_h \setminus \sigma(T).$$

Die zweite Alternative des Theorems kann nicht eintreten, da S beschränktes Spektrum hat, während jedoch C unbeschränkt ist. Es bleibt die erste Alternative, d.h. S hat in C nur diskretes Spektrum, was gleichbedeutend ist mit $S \in \mathbb{GH}(\mathcal{K}, J)$. □

Proposition 24. *Es gilt $\mathbb{GH}(\mathcal{K}, J)$ ist offen bezüglich der Normtopologie.*

Beweis. Folgt aus Proposition 15. Siehe auch untenstehende Proposition 27. □

Proposition 25. *Es gilt*

$$\mathbb{FH}(\mathcal{K}, J) = \mathbb{GH}(\mathcal{K}, J).$$

Beweis. '$\subset$' Sei $H \in \mathbb{FH}(\mathcal{K}, J)$ und I das Intervall $[-\|H\|, \|H\|]$. Zu $x \in \mathbb{R}$ bezeichne Q_x die Orthogonalprojektion auf den Kern von $H + x\mathbb{1}$ und es sei

$$F_x = JQ_x.$$

Es ist $F_x \in \mathbb{H}(\mathcal{K}, J)$, denn $F_x^* J = (JQ_x)^* J = Q_x = JF_x$. Es gilt

$$0 \notin \sigma(H + x\mathbb{1} + F_x),$$

denn nach Kontruktion hat $H + x\mathbb{1} + F_x$ trivialen Kern, und ferner ist

$$\mathrm{Ran}(F_x) = J\mathrm{Ker}(H + x\mathbb{1}) = \mathrm{Ker}((H + x\mathbb{1})^*),$$

woraus wegen $\mathcal{K} = \mathrm{Ran}(H + x\mathbb{1}) \oplus \mathrm{Ker}((H + x\mathbb{1})^*)$ folgt, dass $H + x\mathbb{1} + F_x$ surjektiv ist. Da das Spektrum von $H + x\mathbb{1} + F_x$ in Null verschwindet, gibt es eine offene Umgebung $\mathcal{U}(x) \subset \mathbb{R}$ von x, sodass

$$\sigma(H + F_x) \cap \mathcal{U}(x)$$

leer ist. Da I kompakt ist, existieren $x_1, \dots, x_n \in I$, sodass

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(x_1), \dots, \mathcal{U}(x_n)$$

eine Überdeckung von I ist. Setze für $l \in \{0, \dots, n\}$

$$\mathcal{V}_l = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq \|H\|\} \bigcup_{k=1}^{l} \mathcal{U}(x_k).$$

Mit einer Überlegung wie in Proposition 23 zeigt man, die Menge

$$\sigma(H + F_{x_1}) \cap \mathcal{V}_1$$

ist diskret (setze hierzu $C = \mathcal{V}_0$ und $T = H, S = H + F_{x_1}$). Mit demselben Argument zeigt man, die Menge

$$\sigma(H + F_{x_1} + F_{x_2}) \cap \mathcal{V}_1$$

ist diskret (setze hierzu $C = \mathcal{V}_1$ und $T = H + F_{x_1}, S = H + F_{x_1} + F_{x_2}$). Wiederum mit demselben Argument zeigt man nun, die Menge

$$\sigma(H + F_{x_2}) \cap \mathcal{V}_1$$

ist diskret (setze hierzu $C = \mathcal{V}_1$ und $T = H + F_{x_1} + F_{x_2}, S = H + F_{x_2}$). Nach Kontruktion von F_{x_2} gilt sogar,

$$\sigma(H + F_{x_2}) \cap \mathcal{V}_2$$

ist diskret. Iterativ folgt, die Menge

$$\sigma(H + F_{x_n}) \cap \mathcal{V}_n$$

ist diskret. Im letzten Schritt folgt schliesslich, die Menge

$$\sigma(H) \cap \mathcal{V}_n$$

ist diskret (setze hierzu $C = \mathcal{V}_n$ und $T = H + F_{x_n}, S = H$). Hieraus folgt die Behauptung. '$\supset$' Sei $H \in \mathbb{GH}(\mathcal{K}, J)$ und $x \in \mathbb{R}$. Es ist $\dim \mathrm{Ker}(H + x\mathbb{1})$ endlich und somit ist wegen $J\mathrm{Ker}(H + x\mathbb{1}) = \mathrm{Ker}((H + x\mathbb{1})^*)$ auch $\dim \mathrm{Ker}((H + x\mathbb{1})^*)$ endlich. Bleibt zu zeigen, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ der Operator $H + x\mathbb{1}$ abgeschlossenes Bild hat. Es sei der Operator F_x definiert wie im ersten Teil des Beweises. $H + x\mathbb{1} + F_x$ ist invertierbar, und somit Fredholm. Damit ist auch $H + x\mathbb{1}$ Fredholm, da die Menge der Fredholm Operatoren stabil ist unter kompakter Störung, woraus die Behauptung folgt. □

4.3 Die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{GH}(\mathcal{K}, J)$ und die Homotopieinvarianz der Signatur

Definition 17. *Sei $H \in \mathbb{GH}(\mathcal{K}, J)$, dann sei die Signatur von H definiert als*

$$\mathrm{Sig}(H) = \sum_{\lambda \in \sigma_{\mathrm{dis}}(H) \cap \mathbb{R}} \nu_+(\lambda) - \nu_-(\lambda) \tag{28}$$

und ferner sei für $m \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{GH}_m(\mathcal{K}, J) = \{H \in \mathbb{GH}(\mathcal{K}, J) : \mathrm{Sig}(H) = m\}. \tag{29}$$

Die nächste Proposition zeigt, falls $\dim \mathcal{K} = \infty$, dann ist für alle $m \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{GH}_m(\mathcal{K}, J) \neq \emptyset. \tag{30}$$

Wir zeigen sogar noch etwas mehr:

Proposition 26. *Sei $\dim(\mathcal{K}) = \infty$. Zu jedem Tupel $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, (n, m) \neq (0, 0)$, existiert $H \in \mathbb{GH}(\mathcal{K}, J)$ mit $\sigma(H) \subset \{0, \pm i\}$, mit normalem Eigenwert $\lambda = 0$ und $\nu(\lambda) = (n, m)$.*

Beweis. $\mathcal{K}$ zerfällt in die orthogonale direkte Summe der beiden unendlich dimensionalen Eigenräume $\mathcal{E}_+$ und $\mathcal{E}_-$ von J zum Eigenwert ± 1. Es bezeichne $(b_1, b_2, \ldots)$ und $(c_1, c_2, \ldots)$ eine Orthonormalbasis von von $\mathcal{E}_+$ bzw. $\mathcal{E}_-$. Es sei H in Dirac Notation gegeben durch

$$H = i \sum_{k=1}^{\infty} |c_{k+m}\rangle\langle b_{k+n}| + |b_{k+n}\rangle\langle c_{k+m}|.$$

Es ist $H^* = -H$ und $\sigma(H) = \{0, \pm i\}$. Ferner ist $H^*J = -HJ = JH$ und somit $H \in \mathbb{GH}(\mathcal{K}, J)$. Es bezeichne P_0 die Riesz-Projektion von H zu $\lambda = 0$ mit Bild $\mathcal{E}_0$. Es ist $\mathcal{E}_0 = \mathrm{Ker}(H)$ direkte Summe der J-orthogonalen, nicht-entarteten Teilräume $\mathcal{E}' = \mathrm{span}\{b_1, \ldots, b_n\}$ und $\mathcal{E}'' = \mathrm{span}\{c_1, \ldots, c_m\}$

$$\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}' \hat{+} \mathcal{E}''.$$

Seien Φ, Ψ Frames für $\mathcal{E}', \mathcal{E}''$, dann gilt

$$\nu(\lambda) = \nu(\mathcal{E}' \hat{+} \mathcal{E}'') = \nu(\mathcal{E}') + \nu(\mathcal{E}'') = \nu(\Phi^* J \Phi) + \nu(\Psi^* J \Psi) = \nu(\Phi^* \Phi) + \nu(-\Psi^* \Psi),$$

woraus die Behauptung folgt. □

Proposition 27. *Für alle $m \in \mathbb{Z}$ gilt*
$\mathbb{GH}_m(\mathcal{K}, J)$ *ist offen.*

Beweis. Sei $\mathbb{GH}_m(\mathcal{K}, J)$ nicht-leer und $H \in \mathbb{GH}_m(\mathcal{K}, J)$. Es ist zu zeigen, dass eine Umgebung $\mathcal{U}$ von H existiert, sodass für alle $H' \in \mathcal{U}$ gilt $\mathrm{Sig}(H') = \mathrm{Sig}(H)$. Es sei $\Delta = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ die Menge der reellen normalen Eigenwerte von H und $\Delta_\pm$ das Spektrum von H oberhalb bzw. unterhalb der reellen Achse. Wähle separierende Kurven $\Gamma, \Gamma_\pm$ von Δ und $\Delta_\pm$. Wir dürfen annehmen, dass sich die drei Kurven nicht gegenseitig schneiden und dass $\Delta_\pm$ strikt oberhalb bzw. unterhalb der reelle Achse verläuft. Wir wenden Proposition 15 an (Verallgemeinerte Version, wie in anschließender Bemerkung). Wir erhalten eine Umgebung $\mathcal{U}$ von H, sodass für alle $H' \in \mathcal{U}$ das reelle Spektrum von H' in Γ enthalten ist und $\mathcal{E}'_{\Delta'}$ dieselbe Dimension hat wie $\mathcal{E}_\Delta$. Nach eventueller Verkleinerung der Umgebung $\mathcal{U}$ im Sinne der Inklusion wie in Proposition 16, erhalten wir

$$\nu_\pm(\mathcal{E}_\Delta) = \nu_\pm(\mathcal{E}'_{\Delta'}).$$

mit Proposition 13 erhalten wir

$$\sum_{\lambda \in \Delta} \nu_\pm(\lambda; H) = \sum_{\lambda \in \Delta'} \nu_\pm(\lambda; H').$$

Da nach Lemma 4 komplex-konjugierte Paare von Eigenwerten nichts zur Signatur beitragen, gilt

$$\mathrm{Sig}(H') = \sum_{\lambda \in \Delta'} \nu_+(\lambda; H') - \sum_{\lambda \in \Delta'} \nu_-(\lambda; H') \qquad \mathrm{Sig}(H) = \sum_{\lambda \in \Delta} \nu_+(\lambda; H) - \sum_{\lambda \in \Delta} \nu_-(\lambda; H)$$

und somit die Behauptung. □

Korollar 2. *Die Signatur ist homotopieinvariant in $\mathbb{GH}(\mathcal{K}, J)$. D.h. für jeden stetigen Pfad $[0,1] \ni t \mapsto H_t \in \mathbb{GH}(\mathcal{K}, J)$ ist $t \mapsto \mathrm{Sig}(H_t)$ konstant.*

Wir wollen nun noch zeigen, dass die offenen Komponenten $\mathbb{GH}_m(\mathcal{K}, J)$ von $\mathbb{GH}(\mathcal{K}, J)$, in die $\mathbb{GH}(\mathcal{K}, J)$ zerfällt, zusammenhängend sind. Dazu brauchen wir ein Hilfsmittel:

Lemma 7 (Transformationslemma). *Sei $\mathcal{E}$ ein nicht-entarteter Teilraum von $\mathcal{K}$ mit $\dim \mathcal{E} < \infty$ und $\mathcal{F} = \mathcal{E}^{\hat{\perp}}$. Es bezeichne $P_{\mathcal{E}}$ die schiefe Projektion auf $\mathcal{E}$ mit Kern $\mathcal{F}$ und es sei $P_{\mathcal{F}} = \mathbb{1} - P_{\mathcal{E}}$. Sei $H \in \mathbb{H}(\mathcal{K}, J_F)$ und $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ invariant unter H. Sei Φ ein Frame für $\mathcal{E}$ und Ψ ein Frame für $\mathcal{F}$. Dann ist*

$$\mathcal{K} = \mathcal{E} \oplus \mathcal{F}.$$

Setze $S = (\Phi, \Psi)$. Dann ist S invertierbar mit Inverser und Adjungierter

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \Phi^* P_{\mathcal{E}} \\ \Psi^* P_{\mathcal{F}} \end{pmatrix} \qquad S^* = \begin{pmatrix} \Phi^* \\ \Psi^* \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Setze $j = S^*JS$ und $h = S^{-1}HS$, ferner $j' = \Phi^* H \Phi, j'' = \Psi^* J \Psi$ und $h' = \Phi^* H \Phi, h'' = \Psi^* H \Psi$. Dann

$$j = \begin{pmatrix} \Phi^* J \Phi & 0 \\ 0 & \Psi^* J \Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j' & 0 \\ 0 & j'' \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} \Phi^* H \Phi & 0 \\ 0 & \Psi^* H \Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h' & 0 \\ 0 & h'' \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Ferner gilt

(i) $\sigma(H) = \sigma(h)$.

(ii) H ist J-selbsadjungiert $\Leftrightarrow$ h ist j-selbstadjungiert $\Leftrightarrow$ h' ist j'-selbstadjungiert und h'' ist j''-selbstadjungiert.

Beweis. Nach Proposition 2 gilt $\mathcal{K} = \mathcal{E} \oplus \mathcal{F}$. Es ist ferner

$$\begin{pmatrix} \Phi^* P_{\mathcal{E}} \\ \Psi^* P_{\mathcal{F}} \end{pmatrix} (\Phi, \Psi) = \begin{pmatrix} \Phi^* P_{\mathcal{E}} \Phi & \Phi^* P_{\mathcal{E}} \Psi \\ \Psi^* P_{\mathcal{F}} \Phi & \Psi^* P_{\mathcal{F}} \Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Die Gestalt von S^* rechnen wir nach. Für $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \ell^2(\dim \mathcal{E}) \oplus \ell^2(\dim \mathcal{F})$ ist

$$\langle \phi, S \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle = \langle \phi, \Phi x + \Psi y \rangle = \langle \Phi^* \phi, x \rangle + \langle \Psi^* \phi, y \rangle = \langle \begin{pmatrix} \Phi^* \\ \Psi^* \end{pmatrix} \phi, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle.$$

Da $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ beide J-orthogonal sind, ist $\Phi^* J \Psi = 0$ und $\Psi^* J \Phi = 0$. Hieraus ergibt sich die Diagonalgestalt von j.
Da nach Voraussetzung $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ invariant unter H sind, ergibt sich

$$h = S^{-1} H S = \begin{pmatrix} \Phi^* P_{\mathcal{E}} \\ \Psi^* P_{\mathcal{F}} \end{pmatrix} H(\Phi, \Psi) = \begin{pmatrix} \Phi^* P_{\mathcal{E}} H \Phi & \Phi^* P_{\mathcal{E}} H \Psi \\ \Psi^* P_{\mathcal{F}} H \Phi & \Psi^* P_{\mathcal{F}} H \Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi^* H \Phi & 0 \\ 0 & \Psi^* H \Psi \end{pmatrix}$$

(i) Folgt direkt aus der Tatsache, dass S invertierbar ist.
(ii) Ergibt sich aus $JH = H^* J \Leftrightarrow S^* J S S^{-1} H S = S^* H^* (S^*)^{-1} S^* J S \Leftrightarrow jh = h^* j$. $\square$

Wir wollen das Transformationslemma gleich anwenden, um das reelle Spektrum von $H \in \mathbb{GH}(\mathcal{K}, J)$ in die Null zu ziehen:

Proposition 28. *Sei $H \in \mathbb{GH}(\mathcal{K}, J)$, mit $\sigma(H) \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$, dann ist H innerhalb von $\mathbb{GH}(\mathcal{K}, J)$ homotop zu einem Operator $H' \in \mathbb{GH}(\mathcal{K}, J)$ mit $\sigma(H') \cap \mathbb{R} = \{0\}$.*

Beweis. Sei P die Riesz-Projektion zum reellen Spektrum von H und $\mathcal{E} = \mathrm{Ran}(P), \mathcal{F} = \mathrm{Ran}(\mathbb{1} - P)$. Wir wenden Lemma 7 an. Für $t \in [0, 1]$ sei

$$H_t = S \begin{pmatrix} (1-t)h' & 0 \\ 0 & h'' \end{pmatrix} S^{-1}.$$

Nach (iii) ist h' j'-selbstadjungiert und somit ist auch $(1-t)h'$ j'-selbstadjungiert woraus wiederum mit (iii) folgt, dass H_t J-selbstadjungiert ist. Somit ist $H_t \in \mathbb{GH}(\mathcal{K}, J)$ für alle $t \in [0, 1]$ mit $H_0 = H$. Es ist $H' = H_1$ der gewünschte Operator. □

Die nächsten drei Resultate sind die entscheidenden Zutaten für den Hauptsatz dieser Arbeit. Zunächst betrachten wir einen Operator $H \in \mathbb{GH}(\mathcal{K}, J)$ der einen indefiniten normalen Eigenwert 0 und ansonsten kein reelles Spektrum hat. Wir können seine Entartung durch sogenannte Tangentenbifurkationen soweit reduzieren, bis er definit ist. Dies zeigt die folgende Proposition.

Proposition 29. *Sei $\lambda = 0$ einziger reeller Eigenwert des Operators $H \in \mathbb{GH}(\mathcal{K}, J)$ mit Trägheit $\nu(\lambda) = (n, m)$. Dann ist im Fall $n \neq m$ H innerhalb von $\mathbb{GH}(\mathcal{K}, J)$ homotop zu einem Operator $H' \in \mathbb{GH}(\mathcal{K}, J)$ mit einzigem reellen Eigenwert $\lambda = 0$ und Trägheit*

$$\nu(\lambda) = \begin{cases} (n-m, 0) & n \geq m \\ (0, m-n) & n < m \end{cases}.$$

Im Fall $n = m$ ist H innerhalb von $\mathbb{GH}(\mathcal{K}, J)$ homotop zu einem Operator $H' \in \mathbb{GH}(\mathcal{K}, J)$ der kein reelles Spektrum besitzt.

Beweis. Sei $n \neq 0$ und $m \neq 0$ (andernfalls ist nichts zu zeigen). Es genügt eine Homotopie anzugeben, die n und m jeweils um 1 verringert. Durch Iteration folgt die Behauptung. Sei P_0 die Riesz-Projektion zum Eigenwert $\lambda = 0$, $\mathcal{E} = \mathrm{Ran}(P_0)$ und $\mathcal{F} = \mathrm{Ran}(\mathbb{1} - P_0)$. Wir wenden Lemma 7 an. Wir können oBdA annehmen, dass $j' = \Phi^* J \Phi$ Diagonalgestalt hat (j' ist selbstadjungiert und somit diagonalisierbar), etwa $j' = Diag(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n+m})$. Ferner dürfen wir oBdA annehmen, dass die ersten beiden Diagonaleinträge μ_1 und μ_2 unterschiedliches Vorzeichen haben, denn j' hat nach Voraussetzung indefinite Trägheit. Für $t \in [0, 1]$ seien $h'_t \in \mathrm{Mat}(n \times n; \mathbb{C})$ und der OperatorH_t gegeben durch

$$h'_t = (-\mu_1\mu_2)^{\frac{1}{2}} t \begin{pmatrix} 0 & \mu_2^{-1} \\ \mu_1^{-1} & 0 \end{pmatrix} \oplus 0 \qquad H_t = S \begin{pmatrix} h'_t & 0 \\ 0 & h'' \end{pmatrix} S^{-1}.$$

Wie man nachrechnet, ist h'_t für alle $t \in [0,1]$ j'-selbstadjungiert und

$$\sigma(h'_t) = \begin{cases} \{\pm it\} & n = m = 1 \\ \{0, \pm it\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit dem Transformationslemma folgt, dass $H_t \in \mathbb{GH}(\mathcal{K}, J)$ für alle $t \in [0,1]$. Ferner ist $H_0 = H$. Der gewünschte Operator ist nun $H' = H_1$. □

Die nächste Homotopie zieht das Spektrum auf ein Minimalspektrum zusammen.

Proposition 30. *Sei $H \in \mathbb{GH}(\mathcal{K}, J)$. Sei P_0 die Riesz-Projektion von H zum reellen Spektrum von H und $P_\pm$ die Riesz-Projektion von H zum Spektrum oberhalb bzw. unterhalb der reellen Achse. Dann ist H homotop innerhalb von $\mathbb{GH}(\mathcal{K}, J)$ zum Operator*

$$H' = i(P_+ - P_-).$$

Ferner ist

(i) $\mathcal{K} = \mathrm{Ran}(P_0) \oplus \mathrm{Ran}(P_+) \oplus \mathrm{Ran}(P_-)$

(ii) $P_\pm^* J = JP_\mp, JP = P^* J.$

Beweis. Sei $\mathcal{E} = \mathrm{Ran}(P_0)$ und $\mathcal{F}_\pm = \mathrm{Ran}(P_\pm)$. (i) ergibt sich unmittelbar mit Proposition 9 (iv) und (ii) erhalten wir mit Proposition 11. Insbesondere ist $(i(P_+ - P_-))^* J = iJ(P_+ - P_-)$. Somit ist für alle $t \in [0,1]$

$$H_t = (1-t)H + ti(P_+ - P_+)$$

J-selbstadjungiert. Mit der Zerlegung $\mathcal{K} = \mathcal{E} \oplus \mathcal{F}_+ \oplus \mathcal{F}_-$ ergibt sich

$$H_t = [(1-t)H|_\mathcal{E}] \oplus [(1-t)H|_{\mathcal{F}_+} + ti\mathbb{1}_{\mathcal{F}_+}] \oplus [(1-t)H|_{\mathcal{F}_-} - ti\mathbb{1}_{\mathcal{F}_-}],$$

wobei $H|_\mathcal{E}$ und $H|_{\mathcal{F}_\pm}$ die Einschränkung von H auf $\mathcal{E}$ bzw. $\mathcal{F}_\pm$ bezeichne. Es liegt $\sigma(H|_{\mathcal{F}_\pm})$ strikt oberhalb bzw. unterhalb der reellen Achse, und damit gilt für alle $t \in [0,1]$

$$\sigma(H_t) \cap \mathbb{R} = \sigma((1-t)H|_\mathcal{E}).$$

Somit ist gezeigt, dass für alle $t \in [0,1]$ der Operator H_t ein Element von $\mathbb{GH}(\mathcal{K}, J)$ ist mit $H_0 = H$. Der gewünschte Operator ist nun

$$H' = H_1 = i(P_+ - P_-).$$

□

Die nächste Proposition "dreht" ein Paar Lagranger Frames, bis sie orthogonal zueinander sind. Gleichzeitig wird der Operator mit Minimalspektrum $\{\pm i\}$ mitge"dreht". Dies ist der aufwendigste Beweis.

Proposition 31. *Wir erinnern an die spezielle Gestalt von* $(\mathcal{K}, J) = (\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}, \mathbb{1} \oplus -\mathbb{1})$ *mit separablem Hilbertraum* $\mathcal{H}$. *Sei* $H \in \mathbb{GH}_0(\mathcal{K}, J)$ *mit* $\sigma(H) \cap \mathbb{R} = \emptyset$. *Sei* $\Theta : \mathcal{H} \to \mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ *das Lagrange Frame*

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbb{1} \\ \mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Dann ist H *innerhalb von* $\mathbb{GH}_0(\mathcal{K}, J)$ *homotop zum Operator*

$$i(\Theta\Theta^* - J\Theta(J\Theta)^*).$$

Beweis. Nach Proposition 30 dürfen wir annehmen, dass $\sigma(H) = \{\pm i\}$. Sei $P_\pm$ die Riesz-Projektion von H zum Spektralpunkt $\pm i$ und $\mathcal{E}_\pm = \mathrm{Ran}(P_\pm)$. Seien ferner Φ, Ψ Frames für $\mathcal{E}_+$ und $\mathcal{E}_-$. Nach Proposition 11 ist $P_\pm^* J = JP_\mp$. Wegen $\mathbb{1} = P_+ + P_-$ ist $\mathrm{Ker}(P_\pm) = \mathrm{Ran}(P_\mp)$. Es ergibt sich damit

$$J\mathrm{Ran}(P_\pm) = \mathrm{Ran}(P_\mp^* J) = \mathrm{Ran}(P_\mp^*) = \mathrm{Ker}(P_\mp)^\perp = \mathrm{Ran}(P_\pm)^\perp.$$

Somit ist $\mathcal{E}_\pm \hat{\perp} \mathcal{E}_\pm$ und damit sind Φ, Ψ nach Lemma 1 Lagrange Frames. Seien $u = \pi_\Theta(\Phi), v = \pi_\Theta(\Psi) \in \mathbb{U}(\mathcal{H})$ die stereografischen Projektionen von Φ, Ψ entlang Θ. Seien $u_t = u^{1-t}$, $v_t = u^{-t}v$ und $\Phi_t = \pi_\Theta^{-1}(u_t), \Psi_t = \pi_\Theta^{-1}(v_t)$. Die letzten drei Definitionen sind gerade so gemacht, dass $\Phi_0 = \Phi$ und $\Psi_0 = \Psi$. Es gilt nach Gleichung (5)

$$\Phi_t = \pi_\Theta^{-1}(u_t) = \Theta\frac{1}{2}(u_t + 1) + J\Theta\frac{1}{2}(u_t - 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u_t \\ \mathbb{1} \end{pmatrix} \tag{33}$$

und

$$\Psi_t = \pi_\Theta^{-1}(v_t) = \Theta\frac{1}{2}(v_t + 1) + J\Theta\frac{1}{2}(v_t - 1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v_t \\ \mathbb{1} \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Wegen $P_+P_- = 0$ und $\mathbb{1} = P_+ + P_-$ dürfen wir Proposition 6 anwenden. Wir erhalten, dass $\Psi^* J\Phi$ invertierbar ist. Somit ist auch

$$\Psi_t^* J\Phi_t = \frac{1}{2}(v_t^* u_t - \mathbb{1}) = \frac{1}{2}(v^* u - \mathbb{1}) = \Psi^* J\Phi \tag{35}$$

invertierbar für alle $t \in [0, 1]$. Insbesondere hat $\Psi_t^* J\Phi_t$ trivialen Kern. Setze $\mathcal{E}_+(t) = \mathrm{Ran}(\Phi_t)$ und $\mathcal{E}_-(t) = \mathrm{Ran}(\Psi_t)$. Wir definieren gemäß Proposition 6 die schiefen Projektionen

$$P_+(t) = \Phi_t(\Psi_t^* J\Phi_t)^{-1}\Psi_t^* J \tag{36}$$

und

$$P_-(t) = \Psi_t(\Phi_t^* J\Psi_t)^{-1}\Phi_t^* J \tag{37}$$

für deren Bilder gilt $\mathrm{Ran}(P_+) = \mathcal{E}_+(t)$ und $\mathrm{Ran}(P_-) = \mathcal{E}_-(t)$. Es ist $\Phi_0 = \Phi$ und $\Psi_0 = \Psi$, somit $P_\pm(0) = P_\pm$. Für $t \in [0, 1]$ sei

$$H_t = i(P_+(t) - P_-(t))$$

Wegen
$$P_+(t)^* J = J P_-(t)$$
ist H_t J-selbstadjungiert und damit ist aufgrund der Homotopieinvarianz der Signatur $H_t \in \mathbb{GH}_0(\mathcal{K}, J)$ für alle $t \in [0,1]$. Wir erhalten den Operator
$$H' = H_1 = i(\Theta(\Psi_1^* J\Theta)^{-1}\Psi_1^* J - \Psi_1(\Theta^* J\Psi_1)^{-1}\Theta^* J)$$
Wir überführen nun in einem zweiten Schritt H' in $H'' \in \mathbb{GH}(\mathcal{K}, J)$. Sei
$$v_t = \begin{cases} v_1^{2-t} & 1 \le t < \frac{3}{2} \\ e^{-2\pi i(t-\frac{3}{2})} v_1^{2-t} & \frac{3}{2} \le t \le 2 \end{cases}.$$
und für $1 \le t \le 2$
$$\Psi_t = \pi_\Theta^{-1}(v_t). \tag{38}$$
□

Wir habent bereits gezeigt, dass $v_1^* - \mathbb{1} = v_1^* u_1 - \mathbb{1}$ invertierbar ist. Mit dem spektralen Abbildungssatz sieht man, dass auch für alle $t \in [1,2]$
$$\Psi_t^* J\Theta = v_t^* - \mathbb{1}$$
invertierbar ist. Analog zum ersten Schritt zeigt man, dass für alle $t \in [1,2]$
$$H_t = i(\Theta(\Psi_t^* J\Theta)^{-1}\Psi_t^* J - \Psi_t(\Theta^* J\Psi_t)^{-1}\Theta^* J)$$
ein Element von $\mathbb{GH}(\mathcal{K}, J)$ ist. Es ist nun H_t die gewünschte Homotopie die H überführt in
$$H_2 = i(\Theta(\Psi_2^* J\Theta)^{-1}\Psi_2^* J - \Psi_2(\Theta^* J\Psi_2)^{-1}\Theta^* J) = i(\Theta\Theta^* - J\Theta(J\Theta)^*.$$
□

Jetz fügen wir alle Teile zusammen und erhalten das Hauptergebnis

Theorem 3. *Es gilt die disjunkte Zerlegung*
$$\mathbb{GH}(\mathcal{K}, J) = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \mathbb{GH}_m(\mathcal{K}, J). \tag{39}$$
mit den zusammenhängenden, offene Teilmengen $\mathbb{GH}_m(\mathcal{K}, J) \subset \mathbb{GH}(\mathcal{K}, J)$. *Falls* $\dim \mathcal{K} = \infty$, *ist für alle* $m \in \mathbb{Z}$ *die Komponente* $\mathbb{GH}_m(\mathcal{K}, J)$ *nicht-leer.*

Beweis. Sei $m \in \mathbb{Z}$. Es ist nur noch zu zeigen, dass $\mathbb{GH}_m(\mathcal{K}, J)$ zusammenhängend ist. Sei $H \in \mathbb{GH}_m(\mathcal{K}, J), \kappa$ das Vorzeichen von $\mathrm{Sig}(H)$ und $M = |m|$. Wir erweitern den Kreinraum $(\mathcal{K}, J)$ zum Kreinraum
$$(\tilde{\mathcal{K}}, \tilde{J}) = (\mathbb{C}^M \oplus \mathcal{K}, \kappa\mathbb{1} \oplus J). \tag{40}$$
H setzen wir trivial fort
$$\tilde{H} = 0 \oplus H.$$

$\mathcal{K}$ und $\mathbb{C}^M$ sind invariant unter $\tilde{J}$ und somit nicht-entartet. Darüber hinaus sind $\mathcal{K}$ und $\mathbb{C}^M$ $\tilde{J}$-orthogonal, woraus man leicht sieht, dass $\mathrm{Sig}(\tilde{H}) = 0$. Nach Proposition 30, Proposition 29 und Proposition 31 existiert eine Homotopie $\tilde{H}_t$ innerhalb von $(\tilde{\mathcal{K}}, \tilde{J})$

$$[0,1] \ni t \mapsto \tilde{H}_t$$

wo $\tilde{H}_0 = \tilde{H}$ und $\tilde{H}_1$ unabhängig ist von $\tilde{H}$. Wir wenden nun das Transformationslemma Lemma 7 an. Seien Φ, Ψ Frames für $\mathbb{C}^M$ bzw $\mathcal{K}$. Der Operator

$$h_t'' = \Psi^* \tilde{H}_t \Psi$$

ist nach Lemma 7 (ii) $\Psi^* \tilde{J} \Psi$-selbstadjungiert. Sei

$$H_t = \Psi h_t'' \Psi^*.$$

H_t ist J-selbstadjungiert (modifiziere das Transformationslemma so, dass $S = \Psi$) mit $H_0 = H$. Es ist H_1 unabhängig von H, da $\tilde{H}_1$ unabhängig ist von $\tilde{H}$. Damit folgt die Behauptung. $\square$

5 Kreinräume mit reeller Symmetrie

5.1 Der Kreinraum $(\mathcal{K}, J_F, J_R)$

Im Folgenden bezeichne $\mathcal{K}$ einen komplexen separablen Hilbertraum. Wir versehen den Raum $\mathcal{K}$ mit einer Komplexkonjugation. Hierzu sei eine ausgezeichnete Orthonormalbasis $(b_1, b_2, \ldots)$ von $\mathcal{K}$ gegeben. Wir definieren eine bijektive semilineare Abbildung T (Komplexkonjugation) auf $\mathcal{K}$ vermöge

$$T(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\lambda}_k b_k. \tag{41}$$

Im Folgenden schreiben wir statt $T\phi$ kürzer $\overline{\phi}$. Als nächstes wollen wir die Komplexkonjugierte $\overline{S}$ eines Operators $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ definieren.

Definition 18. *Sei $S \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ dann sei der komplex-konjugierte Operator $\overline{S}$ gegeben durch*

$$\overline{S}\,\overline{\phi} = \overline{S\phi}.$$

Definition 19. *Eine reelle Symmetrie J sei ein unitärer Operator auf $\mathcal{K}$ der folgende Eigenschaften hat*

(i) $J^2 = \eta\mathbb{1}$ *mit Vorzeichen* $\eta \in \{-1, 1\}$.

(ii) $\bar{J} = J$

(iii) Die beiden Eigenräume von J haben dieselbe Dimension.

Die Bezeichnung 'reelle' Symmetrie nimmt Bezug auf Bedingung (ii).

Definition 20. *Seien J_F mit Vorzeichen η_F und J_R mit Vorzeichen η_R reelle Symmetrien. Es bestehe die Kommutationsbeziehung*

$$J_F J_R = \eta_{FR} J_R J_F \tag{42}$$

mit $\eta_{FR} \in \{-1, 1\}$. Dann bezeichnen wir $(\mathcal{K}, J_F, J_R)$ als Kreinraum mit reeller Symmetrie der Art $(\eta_F, \eta_R, \eta_{FR})$.

Die sogenannte Fundamentalsymmetrie J_F übernimmt die Rolle von J aus den vorhergehenden Kapiteln.

Definition 21. *Sei $(\mathcal{K}, J_F, J_R)$ ein Kreinraum mit reeller Symmetrie. Wir bezeichnen einen Operator $H \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ als J_F-selbstadjungiert falls $J_F H^* = H J_F$ und als J_R-symmetrisch, falls $J_R^* \overline{H} = -H J_R$. Es sei*

$$\mathbb{H}(\mathcal{K}, J_F, J_R) = \{H \in \mathcal{B}(\mathcal{K}) : J_F H^* = H J_F \text{ und } J_R^* \overline{H} = -H J_R\} \tag{43}$$

die Menge der J_F-selbstadjungierten und J_R-symmetrischen Operatoren.

Die Trägheit eines Teilraumes $\mathcal{E} \in \mathcal{K}$ und die Trägheit eines normalen Eigenwertes eines Operators $H \in \mathbb{H}(\mathcal{K}, J_F, J_R)$ definieren wir analog wie im Kapitel 2, mit dem kleinen Unterschied, dass wir statt der Fundamentalsymmetrie J_F, die im Allgemeinen nicht selbstadjungiert ist, das selbstadjungierte $J = \sqrt{\eta_F} J_F$ benutzen. Dadurch sind wir wieder in der Situation von Kapitel 2 und Kapitel 3, was zur Folge hat, dass die bisherigen Ergebnisse weiterhin gültig sind.

Definition 22. *Sei $(\mathcal{K}, J_F, J_R)$ ein Kreinraum mit reeller Symmetrie. Sei $\mathcal{E}$ ein Teilraum von $\mathcal{K}$ und Φ ein Frame für $\mathcal{E}$. Die Trägheit von $\mathcal{E}$ sei*

$$\nu(\mathcal{E}) = \nu(\Phi^* \sqrt{\eta_F} J_F \Phi). \tag{44}$$

Aufgrund des Trägheitssatzes von Sylvester ist die Definition unabhängig von der Wahl des Frames Φ.

Definition 23. *Sei $H \in \mathbb{H}(\mathcal{K}, J_F, J_R)$ und λ ein normaler Eigenwert von H. Die Trägheit $\nu(\lambda; H) = \nu(\lambda)$ von λ sei gegeben wie in Definition 12.*

5.2 Spektraleigenschaften J_F selbstadjungierter, J_R-symmetrischer Operatoren

Proposition 32. *Sei J_R eine reelle Symmetrie und H ein J_R-symmetrischer Operator. Dann ist das Spektrum von H symmetrisch bezüglich der imaginären Achse*

$$\sigma(H) = -\overline{\sigma(H)}. \tag{45}$$

Beweis. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Es ist

$$-\overline{J_R^*(H - (-\overline{\lambda})\mathbb{1})J_R} = -J_R^*(\overline{H} - (-\lambda)\mathbb{1})J_R = -(-H - (-\lambda)\mathbb{1}) = (H - \lambda).$$

Da die Linke Seite genau dann invertierbar ist, wenn $H - (-\overline{\lambda})\mathbb{1}$ invertierbar ist, gilt somit

$$-\overline{\lambda} \in \sigma(H) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(H).$$

Sei $J = \sqrt{\eta_F} J_F$. Es hat J die Eigenschaften des in den vorhergehenden Kapiteln definierten J. D.h. $J^* = J$ und $J^2 = \mathbb{1}$. Für einen stetigen Operator $H \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ gilt $JH^* = HJ \Leftrightarrow J_F H^* = HJ_F$, es gilt also

$$\mathbb{H}(\mathcal{K}, J) = \mathbb{H}(\mathcal{K}, J_F). \tag{46}$$

Mit Proposition 10(i) erhalten wir sofort das

Korollar 3. *Sei $H \in \mathbb{H}(\mathcal{K}, J_F, J_R)$ dann ist das Spektrum von H symmetrisch bezüglich der reellen und der imaginären Achse d.h.*

$$\sigma(H) = \overline{\sigma(H)} = \overline{-\sigma(H)} = -\sigma(H). \tag{47}$$

Proposition 33. *Sei $H \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ ein J_R-selbstadjungierter Operator und Δ eine separierte Teilmenge von $\sigma(H)$. Dann*

$$\overline{P}_\Delta J_R = J_R P_{-\overline{\Delta}}. \tag{48}$$

Beweis. Sei Γ eine Kurve, die Δ separiert, dann

$$\begin{aligned} J_R^* \overline{P}_\Delta J_R &= J_R^* \oint_\Gamma \tfrac{d\overline{z}}{-2\pi i}(\overline{z} - \overline{H})^{-1} J_R = \oint_\Gamma \tfrac{d\overline{z}}{-2\pi i}(\overline{z} - J_R \overline{H} J_R^*)^{-1} \\ &= \oint_\Gamma \tfrac{d(-\overline{z})}{2\pi i}(\overline{z} + H)^{-1} = -\oint_\Gamma \tfrac{d(-\overline{z})}{2\pi i}(-\overline{z} - H)^{-1} \\ &= -\oint_{-\overline{\Gamma}} \tfrac{dz}{2\pi i}(z - H)^{-1} = P_{-\overline{\Delta}}. \end{aligned}$$

Wir wollen anmerken, dass aufgrund der Symmetrie des Spektrums von H mit Δ auch $-\overline{\Delta}$ separierte Teilmenge von $\sigma(H)$ ist. Ferner ist die Kurve $-\overline{\Gamma}$ negativ orientiert, und somit verschwindet das Vorzeichen auf der rechten Seite der letzten Identität. □

Proposition 34. *Sei H ein J_R-symmetrischer Operator und $\Delta = -\overline{\Delta}$ eine reelle, separierte Teilmenge des Spektrums von H. Sei $\mathcal{E}_\Delta = \mathrm{Ran}(P_\Delta)$. Dann gilt*

$$J_R \mathcal{E}_\Delta = \overline{\mathcal{E}}_\Delta. \tag{49}$$

Beweis. Nach Proposition 33 ist $P_\Delta = J_R^* \overline{P}_\Delta J_R$, somit ist $\mathrm{Ran}(P_\Delta) = \mathrm{Ran}(J_R^* \overline{P}_\Delta J_R) = J_R^* \mathrm{Ran}(\overline{P}_\Delta) = J_R^* \overline{\mathcal{E}}_\Delta$. □

Proposition 35. *Sei $H \in \mathbb{H}(\mathcal{K}, J_F, J_R)$ und λ ein normaler reeller Eigenwert von H. Dann folgt mit der Identifizierung $\nu_\pm(\cdot) = \nu_{\pm 1}(\cdot)$*

$$\nu_\pm(\lambda) = \nu_{\pm \eta_{FR} \eta_F}(-\lambda). \tag{50}$$

Beweis. Es ist nach Proposition 33 $J^* \overline{P}_\lambda J_R = P_{-\lambda}$. Zusammen mit Proposition 4 folgt

$$\begin{aligned} \nu_\pm(\lambda) &= \nu_\pm(P_\lambda^* \sqrt{\eta_F} J_F P_\lambda) = \nu_\pm(\overline{P_\lambda^* \sqrt{\eta_F} J_F P_\lambda}) = \nu_{\pm\eta_F}(\overline{P}_\lambda^* \sqrt{\eta_F} J_F \overline{P}_\lambda) \\ &= \nu_{\pm\eta_F}(J_R^* P_{-\lambda}^* J_R \sqrt{\eta_F} J_F J_R^* P_{-\lambda} J_R) = \nu_{\pm\eta_F}(P_{-\lambda}^* J_R \sqrt{\eta_F} J_F J_R^* P_{-\lambda}) \\ &= \nu_{\pm\eta_F \eta_{FR}}(P_{-\lambda}^* \sqrt{\eta_F} J_F P_{-\lambda}) = \nu_{\pm\eta_F\eta_{FR}}(-\lambda). \end{aligned}$$

Proposition 36 (Kramersche Entartung). *Sei $H \in \mathbb{H}(\mathcal{K}, J_F, J_R)$, dann*

(i) Falls $H\psi = \lambda\psi$, dann ist $H(J_R\overline{\psi}) = -\overline{\lambda}(J_R\overline{\psi})$.

(ii) Sei $\eta_R = -1$. Sei $\mathcal{E}$ ein endlich dimensionaler Teilraum von $\mathcal{K}$ mit $J_R\overline{\mathcal{E}} = \mathcal{E}$, dann ist $\dim \mathcal{E}$ gerade. Eigenwerte von $H \in \mathbb{H}(\mathcal{K}, J_F, J_R)$ mit verschwindendem Realteil haben gerade algebraische und geometrische Vielfachheit.

Beweis. (i) rechnet man leicht nach. (ii) Wir konstruieren iterativ Teilräume $\mathcal{E}_n = span\{\psi_1, J_R\overline{\psi}_1, \ldots, \psi_n, J_R\overline{\psi}_n\}$ von $\mathcal{E}$ der Dimension $2n$. Falls $\mathcal{E} \neq \{0\}$ wähle $\psi_1 \in \mathcal{E}$ mit $\psi_1 \neq 0$. Es sind $\psi_1, J_R\overline{\psi}_1$ linear unabhängig, denn angenommen es gibt $\mu \in \mathbb{C}$ mit $\psi_1 = \mu J_R\overline{\psi}_1$, dann folgt

$$\psi_1 = \mu J_R\overline{\mu J_R\overline{\psi}_1} = -|\mu|^2\psi_1$$

und damit $\psi_1 = 0$ im Widerspruch zur Wahl von ψ_1. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_n \neq \emptyset$. Wähle $\psi_{n+1} \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_n$. Nach Voraussetzung ist $J_R\overline{\psi}_{n+1} \in \mathcal{E}$. Angenommen es gibt $\phi \in \mathcal{E}_n$ und $\mu \in \mathbb{C}$ mit $J_R\overline{\psi}_{n+1} = \mu\psi_{n+1} + \phi$, dann

$$J_R^2\psi_{n+1} = \overline{\mu J_R\psi_{n+1} + J_R\phi} = \overline{\mu}J_R\overline{\psi}_{n+1} + J_R\overline{\phi} = \overline{\mu}(\mu\psi_{n+1} + \phi) + J_R\overline{\phi}.$$

Es ist also

$$-(|\mu|^2 + 1)\psi_{n+1} = \overline{\mu}\phi + J_R\overline{\phi}.$$

Nach Konstruktion von $\mathcal{E}_n$ ist $J_R\overline{\phi} \in \mathcal{E}_n$ und damit ist die rechte Seite der Identität ein Element von $\mathcal{E}_n$ im Widerspruch zur Wahl von ψ_{n+1}. Es folgt, dass $\mathcal{E}_{n+1}$ die Dimension $2n$ hat. Die Behauptung über die geometrische Vielfachheit erhält man aus (i) und dem gerade Gezeigten. Die Behauptung über die algebraische Vielfachheit erhält man wie folgt: Sei λ ein Eigenwert von H mit verschwindendem Realteil und P_λ die zugehörige Riesz-Projektion. Setze $\mathcal{E} = \mathrm{Ran}(P_\lambda)$. Nach Proposition 34 ist $J_R\mathcal{E} = \overline{\mathcal{E}}$ und somit ist nach dem ersten Teil $\dim\mathcal{E}$ gerade. Letzteres ist aber die algebraische Vielfachheit von λ. □

5.3 Normalformen

Wir wollen in diesem Abschnitt Normalformen der reellen Symmetrien J_F oder J_R näher untersuchen. Normalformen von J_F oder J_R seien Darstellungsmatrizen von J_F oder J_R bezüglich einer reellen unitären Abbildung $U : \ell^2(dim(\mathcal{K})) \to \mathcal{K}$. Beispiele Für Normalformen sind die Matrizen

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \tag{51}$$

mit Blockeinträgen gleicher Größe, mit Ausnahme von J, das unterschiedliche Blockgrößen haben kann. Die folgende Proposition zeigt, dass I und J tatsächlich Normalformen passender reeller Symmetrien sind.

Proposition 37. *Sei J_F eine reelle Symmetrie. Falls $\eta_F = 1$, dann gibt es eine reelle unitäre Abbildung $U = \overline{U} : \ell^2(dim(\mathcal{K})) \to \mathcal{K}$ mit $U^*J_FU = J$. Falls $\eta_F = -1$, dann gibt es eine reelle unitäre Abbildung $U = \overline{U} : \ell^2(dim(\mathcal{K})) \to \mathcal{K}$ mit $U^*J_FU = I$.*

Beweis. Sei $\eta_F = 1$. Dann ist $\sigma(J_F) = \sigma_p(J_F) = \{-1, 1\}$. Die entsprechenden Eigenräume $\mathcal{E}_{-1}$ und $\mathcal{E}_1$ sind invariant unter Komplexkonjugation. Sei $V = (v_1, v_2, \ldots)$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{E}_1$ und $W = (w_1, w_2, \ldots)$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{E}_{-1}$. Es seien V und W so gewählt, dass sie sich zu einer Orthonormalbasis von $\mathcal{K}$ ergänzen. Setzen wir

$\tilde{v}_i = \alpha_i(v_i + \overline{v}_i)$. Dann ist $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \ldots)$ bei geeigneter Wahl der reellen Normierungsfaktoren α_i eine reelle Orthonormalbasis von $\mathcal{E}_1$. Entsprechend sei eine reelle Orthonormalbasis $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \ldots)$ von $\mathcal{E}_{-1}$ konstruiert. Bezeichnen $(e_1, e_2, \ldots)$ und $(f_1, f_2, \ldots)$ die kanonischen Orthonormalbasen von $\ell^2(dim(\mathcal{E}_1))$ bzw. $\ell^2(dim(\mathcal{E}_{-1}))$, dann ist die gesuchte reelle unitäre Abbildung U gegeben durch $U : \ell^2(dim(\mathcal{E}_1)) \oplus \ell^2(dim(\mathcal{E}_{-1})) \to \mathcal{K}$

$$Ue_i = \tilde{v}_i \text{ und } Uf_i = \tilde{w}_i$$

Sei nun $\eta_F = -1$. Dann ist $\sigma(J_F) = \sigma_p(J_F) = \{-i, i\}$. Für die entsprechenden Eigenräume $\mathcal{E}_i$ und $\mathcal{E}_{-i}$ gilt $\overline{\mathcal{E}}_{-i} = \mathcal{E}_i$, insbesondere haben sie dieselbe Dimension. Sei $(v_1, v_2 \ldots)$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{E}_i$, ferner $(e_1, e_2, \ldots)$ und $(f_1, f_2, \ldots)$ Orthonormalbasen von $\ell^2(dim(\mathcal{E}_i))$ bzw. $\ell^2(dim(\mathcal{E}_{-i}))$. Die Abbildung $V : \ell^2(dim(\mathcal{E}_i)) \oplus \ell^2(dim(\mathcal{E}_{-i})) \to \mathcal{K}$ sei geben durch

$$Ve_i = \overline{v}_i \text{ und } Vf_i = v_i$$

Dann ist $V^* J_F V = -iJ$. Mit der Cayley-Transformation

$$C = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & -i\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & i\mathbb{1} \end{pmatrix} \tag{52}$$

erhalten wir $C^* J C = iI$ und somit $(VC)^* J_F VC = I$. Wie man leicht nachrechnet ist VC reell, und somit $U = VC$ die gesuchte Abbildung. $\square$

Proposition 38. *Sei $(\mathcal{K}, J_F, J_R)$ ein Kreinraum mit reeller Symmetrie. Dann gibt es für jede unten angegebene Wahl von $(\eta_F, \eta_R, \eta_{FR})$ eine reelle unitäre Abbildung $U : \ell^2(dim(\mathcal{K})) \to \mathcal{K}$, sodass gilt*

$$U^* J_F U = J \qquad U^* J_R U = \begin{pmatrix} J' & 0 \\ 0 & J'' \end{pmatrix} \qquad (\ 1,\ 1,\ 1) \tag{53}$$

$$U^* J_F U = J \qquad U^* J_R U = \begin{pmatrix} I' & 0 \\ 0 & I'' \end{pmatrix} \qquad (\ 1, -1,\ 1) \tag{54}$$

$$U^* J_F U = I \qquad U^* J_R U = \begin{pmatrix} J' & 0 \\ 0 & J' \end{pmatrix} \qquad (-1,\ 1,\ 1) \tag{55}$$

$$U^* J_F U = I \qquad U^* J_R U = \begin{pmatrix} 0 & -J' \\ J' & 0 \end{pmatrix} \qquad (-1, -1,\ 1) \tag{56}$$

$$U^* J_F U = J \qquad U^* J_R U = K \qquad (\ 1,\ 1, -1) \tag{57}$$

$$U^* J_F U = J \qquad U^* J_R U = I \qquad (\ 1, -1, -1) \tag{58}$$

$$U^* J_F U = I \qquad U^* J_R U = J \qquad (-1,\ 1, -1) \tag{59}$$

$$U^* J_F U = I \qquad U^* J_R U = \begin{pmatrix} I' & 0 \\ 0 & -I' \end{pmatrix} \qquad (-1, -1, -1) \tag{60}$$

Hierbei bezeichnen I', I'' Matrizen von der Blockgestalt wie I und entprechend J', J'' wie J mit passender (im Allgemeinen nicht übereinstimmender) Dimension.

Beweis. Zu (53) und (54): Wir gehen vor wie in Proposition 37. Für J_F erhalten wir die zwei Eigenräume $\mathcal{E}_{-1}$ und $\mathcal{E}_1$ und eine reell unitäre Abbildung $\tilde{U}$, sodass $\tilde{U}^* J_F \tilde{U} = J$. Da nach Voraussetzung J_R und J_F vertauschen, sind $\mathcal{E}_{-1}$ und $\mathcal{E}_1$ invariant unter J_R und somit können wir J_R jeweils auf $\mathcal{E}_{-1}$ und $\mathcal{E}_1$ einschränken. Somit

$$\tilde{U}^* J_R \tilde{U} = \begin{pmatrix} J'_R & 0 \\ 0 & J''_R \end{pmatrix}$$

wobei J'_R und J''_R die Dimension $p = \dim \mathcal{E}_1$ bzw. $q = \dim \mathcal{E}_{-1}$ haben. Im Fall, dass $\eta_R = 1$ ist, existiert ONB $v = (v_1, \ldots, v_p)$ von $\mathcal{E}_1$ und ONB $w = (w_1, \ldots, w_q)$ von $\mathcal{E}_{-1}$. Sei $V = (v, w)$ dann ist die erste Zeile gezeigt mit $U = \tilde{U}V$. Im Fall , dass $\eta_R = -1$ ist, seien U' und U'' wie U in der vorhergehenden Proposition 37 (im Fall $\eta_F = -1$) definiert, und $V = U' \oplus U''$. Die gesuchte Abbildung ist nun $U = \tilde{U}V$.
(55) erhalten wir wie die zweite durch Vertauschung der Rollen von J_F, J_R : Es gibt reell unitäre Abbildung $\tilde{U}$ mit

$$\tilde{U}^* J_F \tilde{U} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1}' & 0 & 0 \\ \mathbb{1}' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbb{1}'' \\ 0 & 0 & \mathbb{1}'' & 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{U}^* J_R \tilde{U} = \begin{pmatrix} \mathbb{1}' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbb{1}'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbb{1}'' \end{pmatrix}.$$

Das gesuchte U ist $U = \tilde{U}P$ mit der Permutationsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \mathbb{1}' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1}' & 0 \\ 0 & \mathbb{1}'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{1}'' \end{pmatrix}.$$

Ferner ist

$$J' = \left(\begin{smallmatrix} \mathbb{1}' & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}'' \end{smallmatrix}\right).$$

Zu (56): Es sei $\mathcal{E}_{\pm i}$ der Eigenraum von J_F zum Eigenwert $\pm i$. Es lässt sich $\mathcal{E}_i$ aufspannen durch normierte Eigenvektoren $\{v_1, v_2, \ldots\}$ und $\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \ldots\}$ von J_R, jeweils zum Eigenwert $\pm i$. Ebenso läßt sich $\mathcal{E}_{-i}$ aufspannen durch normierte Eigenvektoren $\{w_1, w_2, \ldots\}$ und $\{\overline{w}_1, \overline{w}_2, \ldots\}$ von J_R, jeweils zum Eigenwert $\pm i$. Es sei $V = (\overline{v}, v)$ und $W = (\overline{w}, w)$, ferner $\tilde{U} = V \oplus W$ dann ist

$$\tilde{U}^* J_R \tilde{U} = i \begin{pmatrix} J' & 0 \\ 0 & J' \end{pmatrix} \qquad \tilde{U}^* J_F \tilde{U} = i \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}.$$

Mit der Cayley-Transformation C erhalten wir die gesuchte Abbildung $U = \tilde{U}C$.
Zu (57): Sei u_1 ein ein reeller normierter Eigenvektor von J_F mit Eigenwert 1. Falls u_1 nicht reell ist, ersetze u_1 durch $\alpha(u_1 + \overline{u}_1)$, wo α eine Normierungsfaktor ist. Dann ist $J_R u_1$ ebenfalls ein Eigenvektor von J_F mit

$$J_F J_R u_1 = -J_R J_F u_1 = -J_R u_1.$$

Als Eigenvektoren des selbstadjungierten Operators J_F sind u_1 und $J_R u_1$ orthogonal. Mit der letzten Identität sehen wir, dass sie einen J_R- und J_F-invarianten Teilraum aufspannen mit

$$(u_1, J_R u_1)^* J_F (u_1, J_R u_1) = \begin{pmatrix} \langle u_1, J_F u_1 \rangle & 0 \\ 0 & \langle J_R u_1, J_F J_R u_1 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und

$$(u_1, J_R u_1)^* J_R (u_1, J_R u_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir fahren nun fort durch Übergang zum orthogonalen Komplement V der linearen Hülle von $\{u_1, J_R u_1\}$. Es ist V ebenfalls invariant unter J_R und J_F und wir können einen reellen Eigenvektoru_2 von J_F wählen mit Eigenwert 1, so dass dieselben Identitäten gelten. Iterativ erhalten wir nun $u = (u_1, u_2, \ldots)$ und eine reelle unitäre Abbildung $U = (u, J_R u)$ die (bis auf Permutation) die gesuchte Abbildung der vierten Zeile ist.
Zu (58): analog zu (57).
Zu (59): erhält man wie (58) durch Vertauschung der Rollen von J_F und J_R.
Zu (60): Wir wählen einen rellen Einheitsvektor $u_1 \in \mathcal{K}$. Dann sind die vier Vektoren $u_1, J_R u_1, J_F u_1, J_F J_R u_1$ paarweise orthogonal. Letzteres sieht man z.B. wie folgt

$$\langle u_1, J_R u_1 \rangle = \langle \eta_R J_R u_1, u_1 \rangle = -\langle J_R u_1, u_1 \rangle$$

und andererseits da u_1 und J_R reell sind

$$\langle u_1, J_R u_1 \rangle = \langle J_R u_1, u_1 \rangle.$$

Damit ist $(u_1, J_R u_1, J_F u_1, J_F J_R u_1)$ eine partielle Isometrie mit

$$(u_1, J_R u_1, J_F u_1, J_F J_R u_1)^* J_F (u_1, J_R u_1, J_F u_1, J_F J_R u_1) = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$(u_1, J_R u_1, J_F u_1, J_F J_R u_1)^* J_R (u_1, J_R u_1, J_F u_1, J_F J_R u_1) = \begin{pmatrix} I' & 0 \\ 0 & I' \end{pmatrix}$$

mit zweidimensionalem I' bzw $\mathbb{1}$. Durch Übergang zum orthogonalen Komplement der linearen Hülle von $\{u_1, J_R u_1, J_F u_1, J_F J_R u_1\}$ fahren wir iterativ fort und erhalten $u = (u_1, u_2, \ldots)$. Es ist die gesuchte Abbildung (bis auf Permutation) nun

$$U = (u, J_R u, J_F u, J_F J_R u).$$

$\square$

Sei $A \in \mathcal{B}(\mathcal{K})$ unitär, sodass mit geeigneten Phasen κ_F, κ_R, die Operatoren $J'_F = \kappa_F A^* J_F A$ und $J'_R = \kappa_R A^t J_F A$ reelle Symmetrien sind. Dann gilt

$$A^* \mathbb{H}(\mathcal{K}, J_F, J_R) A = \mathbb{H}(\mathcal{K}, J'_F, J'_R) \tag{61}$$

Ferner ist, wie man leicht nachrechnet, $J'_F J'_R = -\eta_{FR} J_F J_R$. Insbesondere also

$$\eta'_{FR} = -\eta_{FR}. \tag{62}$$

Wählen wir $A = C$, $A = C^*$ oder $A = C \oplus C$, dann erhalten wir mit Tabelle 1:

Proposition 39. *Es gilt*

(i) $C\mathbb{H}(\mathcal{K}, I, J)C^* = \mathbb{H}(\mathcal{K}, J, \mathbb{1})$

(ii) $C^*\mathbb{H}(\mathcal{K}, J, K)C = \mathbb{H}(\mathcal{K}, I, \mathbb{1})$

(iii) $C^*\mathbb{H}(\mathcal{K}, J, I)C = \mathbb{H}(\mathcal{K}, I, I)$

(iv) $(C \oplus C)^*\mathbb{H}(\mathcal{K}, I \otimes \mathbb{1}, J \otimes I)C \oplus C = \mathbb{H}(\mathcal{K}, J \otimes \mathbb{1}, J \otimes I)$

J_F, J_R	$\mathbb{1}$	I	J	K
$C^* J_F C$	$\mathbb{1}$	$-iK$	iI	J
$C^t J_R C$	J	iI	$\mathbb{1}$	$-iK$
$C J_F C^*$	$\mathbb{1}$	$-iJ$	K	iI
$\overline{C} J_R C^*$	K	iI	$\mathbb{1}$	iJ

Tabelle 1: Transformierte Normalformen

5.4 Essentially $\mathbb{R}$-gapped, J_F-selbstadjungierte, J_R-symmetrische Operatoren

Definition 24. *Sei $(\mathcal{K}, J_F, J_R)$ ein Kreinraum mit reeller Symmetrie. Wir bezeichnen einen Operator auf $\mathcal{K}$ dessen relles Spektrum aus endlich vielen normalen Eigenvektoren besteht, als essentially $\mathbb{R}$-gapped. Es sei*

$$\mathbb{GH}(\mathcal{K}, J_F, J_R) = \{H \in \mathbb{H}(\mathcal{K}, J_F, J_R) |\ H \text{ ist essentially } \mathbb{R}\text{-gapped}\} \tag{63}$$

die Menge der essentially $\mathbb{R}$-gapped, J_F-selbstadjungierten, J_R-symmetrischen Operatoren.

Definition 25. *Die Signatur eines Operators $H \in \mathbb{GH}(\mathcal{K}, J_F, J_R)$ sei*

$$\mathrm{Sig}(H) = \sum_{\lambda \in \sigma(H) \cap \mathbb{R}} \nu_+(\lambda) - \nu_-(\lambda) \tag{64}$$

Ferner bezeichne für $m \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{GH}_m(\mathcal{K}, J_F, J_R) = \{H \in \mathbb{GH}(\mathcal{K}, J_F, J_R) : \mathrm{Sig}(H) = m\}. \tag{65}$$

Proposition 40. *Sei $H \in \mathbb{GH}(\mathcal{K}, J_F, J_R)$. Sei P_0 die Riesz-Projektion von H zum reellen Spektrum von H und $P_\pm$ die Riesz-Projektion von H zum Spektrum oberhalb bzw. unterhalb der reellen Achse. Dann ist H homotop innerhalb von $\mathbb{GH}(\mathcal{K}, J_F, J_R)$ zum Operator*

$$H' = i(P_+ - P_-). \tag{66}$$

Ferner ist

(i) $\mathcal{K} = \mathrm{Ran}(P_0) \oplus \mathrm{Ran}(P_+) \oplus \mathrm{Ran}(P_-)$

(ii) $P_\pm^* J_F = J_F P_\mp, J_R P_\pm = P_\pm^* J_R$.

Beweis. Der Beweis ist derselbe wie zu Proposition 30. Es bleiben lediglich noch zwei Punkte, die zusätzlich noch gezeigt werden müssen:

(i) $J_R P_\pm = P_\pm^* J_R$.

(ii) $H_t = (1-t)H + ti(P_+ - P_-)$ ist J_R-symmetrisch.

Der erste Punkt folgt mit Proposition 33 und der zweite aus dem ersten und der J_R-Symmetry von H. □

Proposition 41. *Sei $(\mathcal{K}, J_F, J_R)$ ein Kreinraum mit reeller Symmetrie, wo $\eta_R = -1$. Dann gilt für alle ungeraden $m \in \mathbb{Z}$*

$$\mathbb{GH}_m(\mathcal{K}, J_F, J_R) = \emptyset. \tag{67}$$

Beweis. Sei $H \in \mathbb{GH}(\mathcal{K}, J_F, J_R)$ und P die Riesz-Projektion von H zum reellen Spektrum mitRan$(P) = \mathcal{E}$. Dann gilt mit Proposition 36 $\mathrm{Sig}(H) = \nu_+(\mathcal{E}) - \nu_-(\mathcal{E})$ ist gerade, woraus die Behauptung folgt. □

Proposition 42. *Sei $(\mathcal{K}, J_F, J_R)$ ein Kreinraum mit reeller Symmetrie, wo $\eta_F \eta_{FR} = -1$. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{Z}$ mit $m \neq 0$*

$$\mathbb{GH}_m(\mathcal{K}, J_F, J_R) = \emptyset. \tag{68}$$

Beweis. Sei $H \in \mathbb{GH}_m(\mathcal{K}, J_F, J_R)$ Nach Proposition 40 dürfen wir annehmen, dass $\sigma(H) \cap \mathbb{R} \subset \{0\}$. Mit Proposition 35 ist $\nu_+(0) = \nu_-(0)$. Somit $\mathrm{Sig}(H) = 0$, woraus die Behauptung folgt. □

Literatur

[SB] H. Schulz-Baldes *Signature and spectral flow of J-unitary $\mathbb{S}^1$-Fredholm operators,* Integral Equations and Operator Theory 78, 323-374 (2014).

[SV] H. Schulz-Baldes, C. Villegas-Blas *Invariants for J-unitaries on Real Krein spaces and the classification of transfer operators,* preprint 2013, arXiv:1306.186. v1

[Kat] T. Kato *Perturbation Theory for Linear Operators,* (Springer, Berlin, 1966).

[Bog] J. Bognar *Indefinite inner product spaces,* (Springer, Berlin, 1974).

[DS] N. Dunford, J.T. Schwartz *Linear Operators Part III: Spectral Operators,* (Wiley, New York, 1971).

[Con] J:B: Conway *A course in Functional Analysis, second edition,* (Springer, New York, 1990).

[GF] G. Fischer *Lineare Algebra, neunte Auflage,* (Vieweg, Braunschweig/ Wiesbaden, 1986).