Vorlesung „Analytische Zahlentheorie“ (Sommersemester 2024)

Übungsblatt 12 (12.7.2024)

Aufgabe 56: Für $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ wird durch

$$f_m(s) = \sum_{d|m} \frac{\mu(d)}{d^s}$$

eine (endliche) Dirichlet-Reihe definiert, die auf ganz $\mathbb{C}$ definiert und holomorph ist.

(1) Zeige, dass gilt

$$f_m(s) = \prod_{p|m} (1 - \frac{1}{p^s}).$$

(2) Bestimme die Nullstellen von $f_m(s)$.

Aufgabe 57: In der Vorlesung wurde (mit elementaren Mitteln) gezeigt, dass $\vartheta(x) \leq \psi(x) \leq \vartheta(x) + 3\sqrt{x}$ für alle $x \geq 0$ gilt. Zeige (mit Hilfe des Primzahlsatzes), dass

$$\psi(x) - \vartheta(x) \sim \sqrt{x}$$

gilt.

Aufgabe 58:

(1) Zeige, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$p \mid n^2 + 2 \quad \Longrightarrow \quad p = 2 \quad \text{oder} \quad p \equiv 1 \bmod 8 \quad \text{oder} \quad p \equiv 3 \bmod 8.$$

(2) Zeige, dass für ungerades $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $n^2 + 2$ mindestens einen Primteiler $p \equiv 3 \bmod 8$ hat.

(3) Bleibt die Aussage in (2) richtig, wenn man auf die Voraussetzung „ungerade“ verzichtet?

(4) Zeige, dass es unendlich viele Primzahlen $p \equiv 3 \bmod 8$ gibt.

(Hinweis: Für Teilaufgabe (1) können Kenntnisse des Legendre-Symbols hilfreich sein.)

Aufgabe 59: Ohne Verwendung des Dirichletschen Primzahlsatzes zeige man: Gibt es für alle $a \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(a, N) = 1$ stets mindestens eine Primzahl p mit $p \equiv a \bmod N$, so gibt es sogar unendlich viele solcher Primzahlen.

Aufgabe 60: Zeige, dass es zu gegebenen Zahlen $a \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(a, N) = 1$ und $r \in \mathbb{N}$ unendlich viele natürliche Zahlen n gibt, sodass $n \equiv a \bmod N$ gilt und n das Produkt von r verschiedenen Primzahlen ist. (Der Dirichletsche Primzahlsatz darf verwendet werden.)

Datei: anazt_u12.tex. Version vom 11.7.2024